

## Musterlösung zu Übung 2 zur Vorlesung Messtechnik I im SS 2006

Abgabe: KW 22, 21 Punkte

### Hausaufgabe 1: Strahlungsgesetz und Thermopile

5 Punkte

- (1P) Was beschreibt das Plancksche Strahlungsgesetz und in welchem Zusammenhang dazu steht das Wiensche Verschiebungsgesetz? Drücken Sie die Zusammenhänge auch in Formeln aus!
- (1P) Ein Strahlungssensor sollte im Idealfall eine hohe Empfindlichkeit haben und ein schnelles Ansprechverhalten zeigen. Wieso ist das in der Praxis nicht möglich?
- (1P) Thermoelemente haben im Vergleich zu Metallwiderstandsthermometern eine relativ geringe Empfindlichkeit, warum werden sie trotzdem für Strahlungssensoren verwendet? Wie kann man die Empfindlichkeit erhöhen?
- (1P) Wodurch ist die Detektivität des Thermopiles begrenzt? Welchen Einfluss haben die geometrischen Abmessungen der Thermoschenkel hierauf?
- (1P) Welches Verhältnis besteht zwischen der Empfindlichkeit eines Strahlungsthermoelementes und der Empfindlichkeit einer Strahlungsthermosäule, wenn die Wärmeleitung durch die Thermoschenkel dominiert wird?

### Musterlösung

- Das Plancksche Strahlungsgesetz beschreibt die Abhängigkeit der spektralen Strahldichte eines

Schwarzstrahlers von der Temperatur und der Wellenlänge: 
$$M_{\lambda T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot h \cdot c^2}{\lambda^5 \cdot \left( e^{\frac{hc}{\lambda T}} - 1 \right)}$$

Wird das Plancksche Strahlungsgesetz nach der Wellenlänge abgeleitet und Null gesetzt, erhält man den Zusammenhang zwischen der Temperatur und der Wellenlänge, bei der die Ausstrahlung ein Maximum hat. Das Wiensche Verschiebungsgesetz gibt diesen Zusammenhang an: 
$$\lambda_{\max} \cdot T = 2896 \mu\text{m} \cdot K$$

1P

- Bei gleich bleibender Einstrahlung ist die Temperaturdifferenz, und damit die Empfindlichkeit vom thermischen Widerstand abhängig ( $\Delta T = R_{th} \cdot \Phi$ ). Eine hohe Empfindlichkeit fordert einen hohen thermischen Widerstand. Die thermische Zeitkonstante ist jedoch ebenfalls proportional zum thermischen Widerstand ( $\tau = R_{th} \cdot C_{th}$ ), weshalb in der Praxis ein Kompromiss zwischen hoher Empfindlichkeit und schneller Messung eingegangen wird.

1P

- Für den Strahlungsfluss von einem Sender zu einem Empfänger gilt:

$$\Phi = \sigma \cdot \frac{A_S \cdot A_E}{\pi \cdot a^2} \cdot (T_S^4 - T_E^4)$$
 Thermoelemente messen direkt die Temperaturdifferenz und eignen sich deshalb für Strahlungssensoren. Außerdem haben Thermoelemente eine höhere Detektivität als Metallwiderstandsthermometer. Zur Erhöhung der Empfindlichkeit werden mehrere Thermoelemente in Serie miteinander verschaltet.

1P

- Die Detektivität ist durch das thermische Widerstandsrauschen in den Thermoschenkeln begrenzt: 
$$\tilde{u}_{\text{Rauschen}} = \sqrt{4 \cdot k \cdot T \cdot R_{el} \cdot \Delta f}$$
 Hierbei ist die Rauschspannung proportional zu dem elektrischen Widerstand. Dieser wird wiederum durch die Länge und den Querschnitt der Thermoschenkel

bestimmt. Für eine möglichst kleine Rauschspannung sollten die Thermoschenkel möglichst kurz bei einem großen Querschnitt sein ( $R = \rho \cdot \frac{l}{A}$ ). Dadurch sinken allerdings gleichzeitig der thermische

Widerstand und damit die Empfindlichkeit sowie auch die Detektivität. In der Praxis ist somit ein Kompromiss zu suchen, der eine insgesamt optimale Detektivität gewährleistet.

1P

- e) Die Empfindlichkeit eines einzelnen Thermoelements und eines Thermopiles ist annähernd gleich. Die elektrische Reihenschaltung der einzelnen Thermoelemente wird durch die thermische Parallelschaltung der Einzelleitwerte praktisch kompensiert, wenn man davon ausgeht, dass der Wärmeleitwert durch die Metallschenkel der Thermoelemente bestimmt wird:

$$S_{\text{Thermoelement}} = \frac{(\alpha_A - \alpha_B)}{G_{\text{th,einzel}}}$$

$$S_{\text{Thermopile}} = \frac{n \cdot (\alpha_A - \alpha_B)}{G_{\text{th}}} \text{ mit } G_{\text{th}} = \cancel{G_{L_{\text{Gas}}}} + \cancel{G_{\text{Str}}} + \overset{0}{G_{L_{\text{Mem}}}} + n \cdot (G_{L_A} + G_{L_B}) = n \cdot (G_{L_A} + G_{L_B}) = n \cdot G_{\text{th,einzel}}$$

$$\Rightarrow S_{\text{Thermopile}} = \frac{n \cdot (\alpha_A - \alpha_B)}{n \cdot G_{\text{th,einzel}}} = S_{\text{Thermoelement}}$$

1P

## Hausaufgabe 2: Thermopile

5 Punkte

Die kreisförmige Empfängerfläche eines Strahlungssensors hat einen Durchmesser von  $d = 1,5 \text{ mm}$ , die Empfindlichkeit der Membrananordnung beträgt  $S_{\text{Membran}} = 12 \text{ K/mW}$ . Zur Messung der eingestrahnten Leistung werden insgesamt 40 Bi/Sb Thermoelemente in Reihe geschaltet. Der Sensor hat einen Erfassungswinkel von  $\varphi = 15^\circ$ .

- (5P) Mit diesem Sensor soll bei einer Umgebungstemperatur von  $15^\circ\text{C}$  die Temperatur einer Heizplatte (schwarzer Strahler, Radius  $15 \text{ cm}$ ) aus einer Entfernung von  $1 \text{ m}$  erfasst werden. Welches Signal erhält man bei einer Temperatur der Heizplatte von  $200^\circ\text{C}$ ? Wie groß ist die Empfindlichkeit der Anordnung bei dieser Heizplattentemperatur?

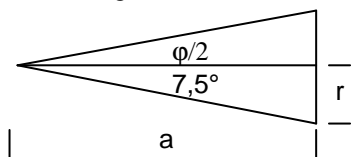
### Musterlösung zu Hausaufgabe 2: Thermopile

Berechnung der Strahlungsleistung, die auf die Fläche  $A_{\text{Empfänger}}$  (Temperatur  $T_{\text{Empfänger}}$  in K) von der im Abstand  $a$  befindlichen Fläche  $A_{\text{Sender}}$  (Temperatur  $T_{\text{Sender}}$  in K):

$$\Phi = \sigma \cdot \frac{A_{\text{Sender}} \cdot A_{\text{Empfänger}}}{\pi \cdot a^2} \cdot (T_{\text{Sender}}^4 - T_{\text{Empfänger}}^4) \text{ mit } \sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4 \text{ (Stefan-Boltzmann-Konst.)}$$

1P

Hier muss beachtet werden: der Sensor erfasst lediglich einen Raumwinkel von  $15^\circ$ , d.h. bei einer Entfernung von  $1 \text{ m}$  „sieht“ er nur eine Teilfläche der Heizplatte von (siehe Skizze):



$$r = a \cdot \tan \frac{\varphi}{2} = 1 \cdot \tan \frac{15^\circ}{2} = 13,2 \text{ cm}$$

1P

$$A_{\text{Sender}} = \pi r^2 = \pi \cdot (13,2 \text{ cm})^2 = 5,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

Mit der gegebenen Empfindlichkeit  $S_{\text{Membran}}$  ergibt sich für die Signalspannung in Abhängigkeit von der eingestrahnten Leistung (mit  $n$ : Anzahl der Thermoelemente):

$$\begin{aligned}
 U_{\text{Signal}} &= n \cdot \alpha \cdot S_{\text{Membran}} \cdot \Phi = n \cdot \alpha \cdot S_{\text{Membran}} \cdot \sigma \cdot \frac{A_1 \cdot A_2}{\pi a^2} \cdot (T_{\text{Heizplatte}}^4 - T_{\text{Umgebung}}^4) \\
 &= n \cdot \alpha \cdot S_{\text{Membran}} \cdot \sigma \cdot \frac{\pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \pi a^2 \cdot \left(\tan \frac{\varphi}{2}\right)^2}{\pi a^2} \cdot (T_{\text{Heizplatte}}^4 - T_{\text{Umgebung}}^4) \\
 &= n \cdot \alpha \cdot S_{\text{Membran}} \cdot \sigma \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \left(\tan \frac{\varphi}{2}\right)^2 \cdot (T_{\text{Heizplatte}}^4 - T_{\text{Umgebung}}^4) \\
 &= 40 \cdot 100 \frac{\mu\text{V}}{\text{K}} \cdot 12 \frac{\text{K}}{\text{mW}} \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \cdot \pi \cdot (0,75 \cdot 10^{-3} \text{m})^2 \cdot \left(\tan \frac{15}{2}\right)^2 \cdot ((473\text{K})^4 - (288\text{K})^4) \\
 &= 3,6\text{mV}
 \end{aligned}$$

2P

(Anmerkung: Man erkennt, dass durch die Optik mit dem eingeschränkten Sichtfeld des Sensors eine Entfernungs-unabhängige Messung der Temperatur ermöglicht wird, so lange der Sender das Sichtfeld des Empfängers voll ausfüllt.)

Für die Empfindlichkeit der Anordnung gilt:

$$\begin{aligned}
 S_{\text{Sensor}} &= \frac{\partial U_{\text{Signal}}}{\partial T_{\text{Heizplatte}}} = n \cdot \alpha \cdot S_{\text{Membran}} \cdot \sigma \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \left(\tan \frac{\varphi}{2}\right)^2 \cdot \frac{\partial}{\partial T_{\text{Heizplatte}}} (T_{\text{Heizplatte}}^4 - T_{\text{Umgebung}}^4) \\
 &= n \cdot \alpha \cdot S_{\text{Membran}} \cdot \sigma \cdot \pi \cdot d^2 \cdot \left(\tan \frac{\varphi}{2}\right)^2 \cdot T_{\text{Heizplatte}}^3 \\
 &= 40 \cdot 100 \frac{\mu\text{V}}{\text{K}} \cdot 12 \frac{\text{K}}{\text{mW}} \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \cdot \pi \cdot (1,5 \cdot 10^{-3} \text{m})^2 \cdot \left(\tan \frac{15}{2}\right)^2 \cdot (473\text{K})^3 = 35,3 \frac{\mu\text{V}}{\text{K}}
 \end{aligned}$$

2P

### Hausaufgabe 3: Pyroelektrischer Effekt

5 Punkte

Ein Bewegungsmelder (passiver Infrarotalarmgeber) soll mit einem thermischen Strahlungssensor betrieben werden.

- (1P) Erklären Sie den pyroelektrischen Effekt mit eigenen Worten!
- (2P) Skizzieren Sie den Verlauf der Signalspannungen pyroelektrischer und thermoelektrischer Strahlungssensoren, wenn der einfallende infrarote Strahlungsfluss rechteckförmig moduliert wird. Welcher der beiden Sensoren ist für einen Bewegungsmelder besser geeignet? Begründung!
- (2P) Bis zu welcher Entfernung kann ein Mensch (Abstrahlfläche  $\sim 0,5 \text{ m}^2$ ) bei  $20^\circ\text{C}$  Umgebungstemperatur erkannt werden, wenn ein pyroelektrischer Sensor mit einer Empfindlichkeit von  $5000 \text{ V/W}$  und einem Empfängerflächendurchmesser von  $0,5 \text{ mm}$  verwendet wird und der nach geschaltete Detektor ein Spannungssignal von  $10 \mu\text{V}$  anzeigen kann?

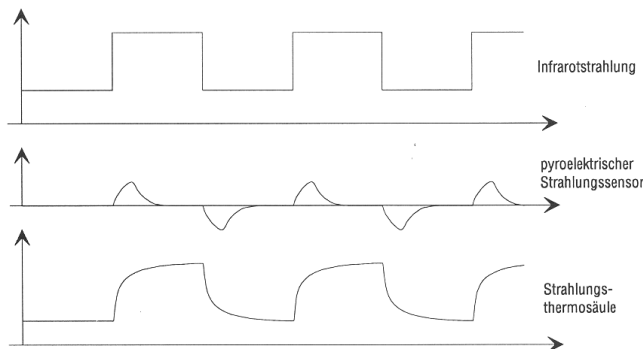
### Musterlösung:

- In Nichtleitern existieren keine freien Ladungen. Durch Strahlungseinfall kommt es in bestimmten ferroelektrischen Materialien durch Temperaturänderung zu einer spontanen Polarisierung, einer

Ladungsverschiebung der festen Elementarladungen im atomaren oder molekularen Bereich. Dies führt zu einer messbaren Änderung der Oberflächenladung.

1P

b) Skizze:



Quelle: Elbel, S.157

1P

Prinzipiell erfassen Pyrometer nur Temperaturänderungen (durch den bei der Polarisationsänderung fließenden Strom), thermoelektrische Strahlungssensoren erfassen die Temperatur absolut. Daher eignen sich pyroelektrische Sensoren zum Erkennen bewegter Wärmequellen.

1P

c)

Für die Empfindlichkeit gilt:

$$S = \frac{U}{\Phi} \left[ \frac{V}{W} \right]$$

Zur Entstehung von 10  $\mu V$  Signalspannung müssen demnach  $2 \cdot 10^{-9} W$  Strahlungsleistung eingestrahlt werden. Unter der Annahme einer Sensortemperatur von 20°C, einer Körpertemperatur von 37°C und einer abstrahlenden Fläche von 0,5 m<sup>2</sup> erhält man durch Auflösen der Gleichung:

$$\frac{U}{S} = \Phi = \frac{\sigma \cdot A_1 \cdot A_2}{\pi \cdot a^2} (T_1^4 - T_2^4)$$

$$a^2 = \frac{\sigma \cdot A_1 \cdot A_2}{\pi \cdot \Phi} (T_1^4 - T_2^4) = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4} \frac{0,5 m^2 \cdot \left( \frac{0,5 \cdot 10^{-3} m}{2} \right)^2}{2 \cdot 10^{-9} W} (310^4 - 293^4) K^4 = 1652 m^2$$

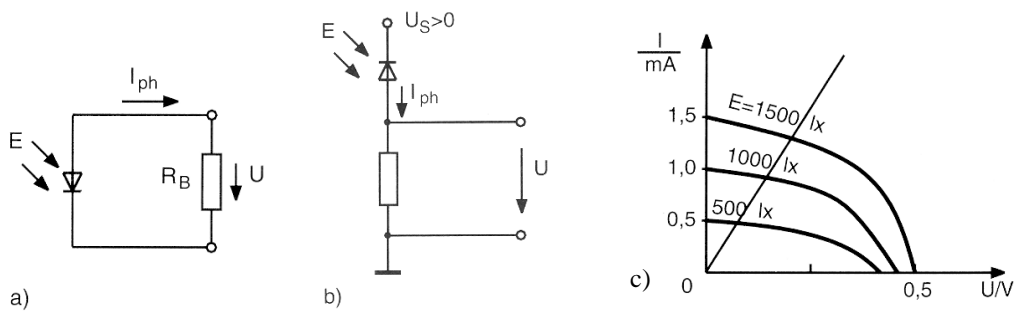
$$\Rightarrow a = 40,6 m$$

2P

## Hausaufgabe 4: Grundlagen Quantendetektoren

6 Punkte

- (2P) Erklären Sie den inneren Photoeffekt am Beispiel des pn-Übergangs einer Photodiode! Was unterscheidet den inneren von dem äußeren Photoeffekt?
- (4P) Im folgenden Bild sehen Sie zwei Möglichkeiten der Beschaltung einer Photodiode. Ordnen Sie die Bilder den Betriebsarten „Photoconductive“ und „Photovoltaic“ zu und erklären Sie die Begriffe! Geben Sie an, für welchen technischen Einsatz welche Betriebsart zu bevorzugen ist! Welche Schaltung passt zu der Lastgeraden im Kennlinienbild c)? Begründung!



## Musterlösung:

- a) Grundprinzip: Absorption von Lichtquanten im Material:

Energieübertragung auf Elektron  $\Rightarrow$  Anregung

Innerer Fotoeffekt (in Halbleitern): Elektron wird aus Valenzband ins Leitungsband angeregt

In der an freien Ladungsträgern verarmten Raumladungszone des pn-Überganges findet die durch Lichtquanten angeregte Erzeugung eines Elektron-Loch-Paares statt. Die Ladungen werden getrennt. Dadurch verkleinert sich die Raumladungszone und im Bändermodell verschieben sich die Fermienergien von p- und n-HL, was als spannungserzeugender Effekt an den Elektroden der Photodiode messbar ist. (Prinzip der Solarzelle)

1P

Äußerer Fotoeffekt: Elektron wird aus Material herausgeschlagen ins Vakuum, Einsatz in der Fotozelle.

1P

- b) Schaltung a) stellt den Photovoltaic - Betriebsmodus einer Photodiode dar. Die Diode wird als Spannungsquelle eingesetzt und liefert an dem Lastwiderstand den Photostrom  $I_{ph}$ . Deshalb passt diese Schaltung zu dem Kennlinienbild c). Die Schaltung hat die höchste Detektivität und wird deshalb in der Sensorik angewendet.

1+1P

Schaltung b) stellt den Photoconductive - Betriebsmodus dar. Die Diode wird mit einer Vorspannung in Sperrrichtung als Photoleiter betrieben. Ohne Beleuchtung ist an der Diode ein maximaler Spannungsabfall und die Spannung  $U$  am Lastwiderstand ist  $U = 0$  V. Mit zunehmender Beleuchtung steigt nun die Spannung  $U$  ab einem Schwellenwert, der abhängig von  $U_S$  ist, an und ist ein Maß für die Beleuchtungsstärke. Durch die Vorspannung wird die Kapazität des pn-Überganges herabgesetzt, wodurch die Diode ein schnelleres Ansprechverhalten zeigt, weshalb die Verschaltung in der optischen Kommunikationstechnik eingesetzt wird.

1+1P

## Sonderaufgabe 1: Bolometer

In der Skizze sehen Sie Schaltung eines Bolometers:

