

ИНСТИТУТ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ СЕРВИСА И ДИАГНОСТИКИ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА К КУРСОВОМУ ПРОЕКТУ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СВЯЗИ»

Выполнил: студент гр. ЗРТ-314
Бурдин А.Н.

Проверил: К.Т.Н., доцент

Омск 2007

Реферат

В данной курсовой работе проведены следующие расчёты: анализ сигнала, расчет спектральных характеристик сигнала, расчёт практической ширины спектра, расчет интервала дискретизации и разрядности кода, расчет автокорреляционной функции кодового сигнала, его энергетического спектра, расчет спектральных характеристик модулированного сигнала, его мощности, расчет вероятности ошибки при воздействии белого шума. Объем пояснительной записки составляет 32 страниц.

Содержание

1. Введение	4стр.
2. Анализ задания	6стр.
3. Расчет спектральных характеристик сигнала	7 стр.
4. Расчет практической ширины спектра сигнала	10стр.
5. Расчет интервала дискретизации и разрядности кода	12стр.
6. Расчет автокорреляционной функции сигнала и энергетического спектра	18стр.
7. Расчет спектральных характеристик модулированного сигнала	20стр.
8. Расчет мощности модулированного сигнала	25 стр.
9. Расчет вероятности ошибки при воздействии белого шума	26 стр.
10. Заключение	31 стр.
11. Литература	32 стр.

1. Введение.

Структурная схема системы электросвязи представлена на рис. 1.

Источник сообщения ИС – это некоторый объект или система, от которого передается информация в виде ее физического представления, например в виде изменяющегося во времени тока или напряжения $a(t)$.

ФНЧ предназначен для фильтрации сигнала с целью ограничения спектра сигнала сообщения $a(t)$ верхней частотой F_v .

Дискретизатор позволяет представить отклик ФНЧ $X(t)$ в виде последовательности отсчетов $X_k = X(tk = kT), k = 0, 1, 2, \dots$.

Квантователь осуществляет нелинейное преобразование отсчетов X_k в квантованные уровни $X_k^{(n)}, n = \overline{0, L-1}$.

Кодер осуществляет кодирование квантованных уровней $X_k^{(n)}$ двоичным безизбыточным кодом, т.е. образует последовательность кодовых комбинаций $B_k^{(n)}$, т.е. сигнал ИКМ.

Модулятор формирует каналный сигнал $S(t, b_i)$, электрическое колебание, параметр которого (амплитуда, частота или фаза) изменяется по закону модулирующего сигнала ИКМ.

Выходное устройство ПДУ осуществляет фильтрацию и усиление модулированного колебания $S(t, b_i)$ для предотвращения внеполосных излучений и для установления требуемого отношения сигнал/шум на входе приемника. Усиленный сигнал $S(t)$ передается в линию связи.

Линия связи – среда, по которой распространяется сигнал $S(t)$ с выхода ПДУ до входа ПРУ. В линии связи на сигнал $S(t)$ накладывается помеха $N(t)$.

Входное устройство ПРУ осуществляет фильтрацию принятого сигнала, смеси переданного сигнала и помехи $Z(t) = S(t) + N(t)$.

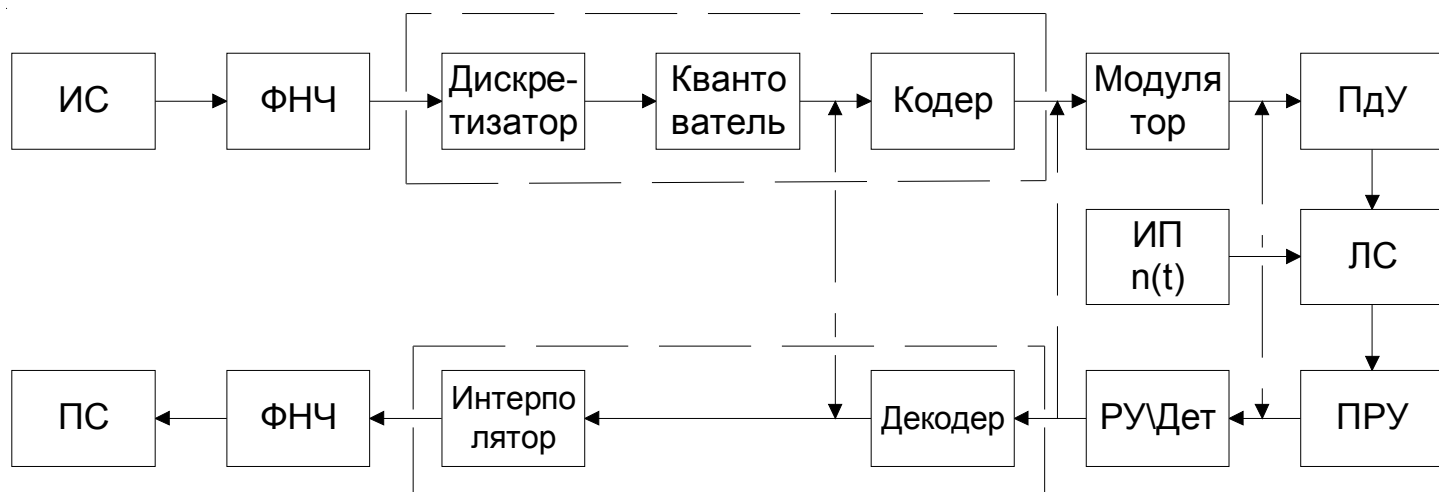
Детектор позволяет выделить из принятого сигнала $S(t, b_i)$ закон изменения информационного параметра, пропорционального сигналу ИКМ.

Для опознания переданных двоичных символов b_i на выход детектора подключается решающее устройство РУ, на выходе которого присутствует принятая кодовая комбинация $\vec{b}^{(m)}$.

Декодер служит для восстановления L -ичных уровней $\vec{X}_k^{(m)}, m = \overline{0, L-1}, k = 0, 1, 2, \dots$ из двоичных кодовых комбинаций $\vec{b}^{(m)}$.

Интерполятор производит восстановление непрерывного сигнала $\mathcal{X}_m(t)$ из последовательности L -ичных уровней $\mathcal{X}_k^{(m)}$.

Получатель сообщения – это некоторый объект или система, которому передается информация в виде ее физического представления, т.е. в виде изменяющегося во времени сигнала $a(t)$.



ИС - источник сообщения
 ПДУ - передающее устройство
 ЛС - линия связи
 Дет - детектор
 ПС - получатель сообщения

ФНЧ - фильтр низкой частоты
 ИП - источник помех
 ПРУ - приемное устройство
 РУ - решающее устройство

Рис.1.

2. Анализ задания.

Введем исходные данные :

Амплитуда $U_m := 1 \cdot \text{volt}$ $\tau_1 := 0.75 \cdot 10^{-3} \cdot \text{s}$ $j := \sqrt{-1}$ $N := 100$ $k := 0..N$ $R := 1 \cdot \Omega$

Коэффициент затухания $\alpha := \frac{1}{\tau_1}$ $\alpha = 1.333 \times 10^3 \frac{1}{\text{s}}$

Коэффициент от полной мощности сигнала $\gamma := 0.95$

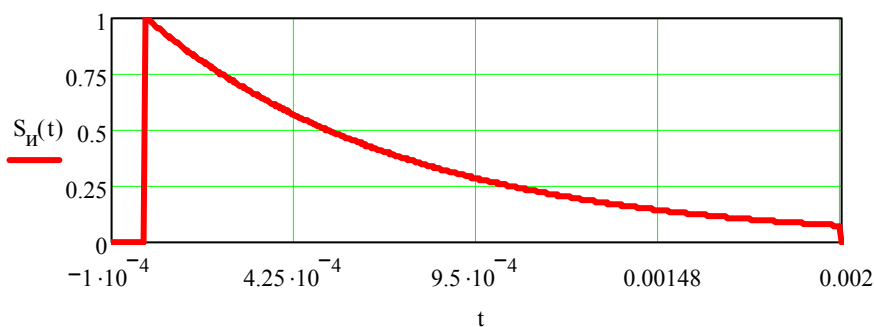
Период $T := 2 \cdot 10^{-3} \cdot \text{s}$, $T = 2 \times 10^{-3} \text{ s}$. Угловая частота 1-ой гармоники $\omega_1 := \frac{2\pi}{T}$, причем частота 1-ой гармоники

$f_1 := \frac{1}{T}$ ($f_1 = 500 \text{ Hz}$) и $\omega_1 := 2 \cdot \pi \cdot f_1$ ($\omega_1 = 3.142 \times 10^3 \frac{1}{\text{s}} \text{ rad}$).

Математическая модель сигнала:

$$S_H(t) := \begin{cases} U_m \cdot e^{-\alpha \cdot t} & \text{if } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

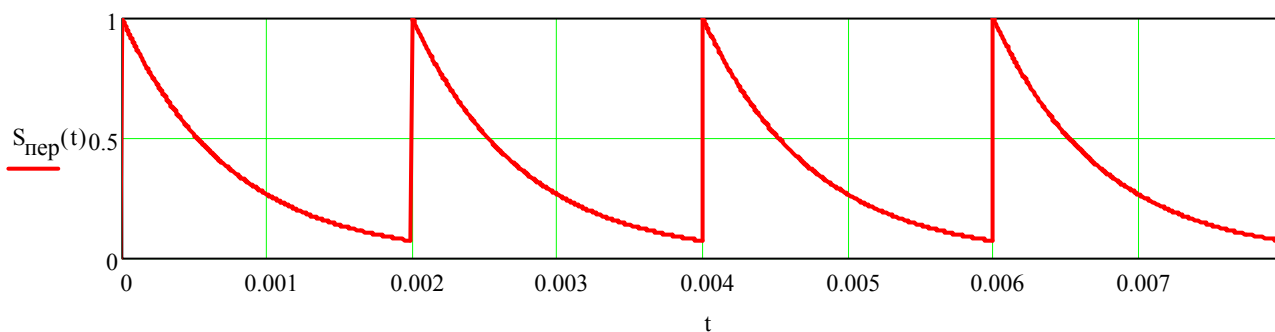
экспоненциальный импульс



Аналоговый периодический сигнал может быть получен из импульсного аналогового сигнала путем суммирования его задержанных копий через равные интервалы времени:

$$S_{\text{пер}}(t) := \sum_{k=0}^{10} S_H(t - k \cdot T)$$

периодический экспоненциальный сигнал



3. Расчет спектральных характеристик сигнала.

Любой периодический сигнал $x(t)$ может быть представлен **тригонометрическим рядом Фурье**

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t + \varphi_k) \quad (3.1)$$

где $\omega_1 = 2\pi/T$ — угловая частота 1-й или основной гармоники; a_0, a_k и b_k — коэффициенты разложения, вычисляемые по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_n}^{t_n+T} x(t) dt; \quad a_k = \frac{2}{T} \int_{t_n}^{t_n+T} x(t) \cos k\omega_1 t dt; \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{t_n}^{t_n+T} x(t) \sin k\omega_1 t dt;$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}; \quad \varphi_k = -\arctg \frac{b_k}{a_k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

где A_k — **амплитуда k -й гармоники**; φ_k — **фаза k -й гармоники**; a_0 — **среднее значение сигнала** (постоянная составляющая); $k\omega_1 = \omega_k$ — **угловая частота k -й гармоники**; t_n — **момент времени, соответствующий началу периода**.

Зависимости A_k и φ_k от частоты ω_k — это **спектры амплитуд и фаз** соответственно.

В некоторых случаях более удобна **комплексная форма ряда Фурье**

$$x(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k e^{jk\omega_1 t}. \quad (3.2)$$

Коэффициенты \dot{A}_k ряда (1.2) вычисляются по формуле

$$\dot{A}_k = \frac{2}{T} \int_{t_n}^{t_n+T} x(t) e^{-jk\omega_1 t} dt. \quad (3.3)$$

Формулы (1.2) и (1.3) — **пара преобразований Фурье**. Совокупность коэффициентов $\dot{A}_k = A_k e^{j\varphi_k}$ — **комплексный спектр периодического сигнала $x(t)$** . Совокупность действительных величин $A_k = |\dot{A}_k|$ в зависимости от частоты — **спектр амплитуд**. Совокупность величин φ_k в зависимости от частоты — **спектр фаз**.

Ряд (1.2) удобно представлять в форме

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{jk\omega_1 t},$$

где

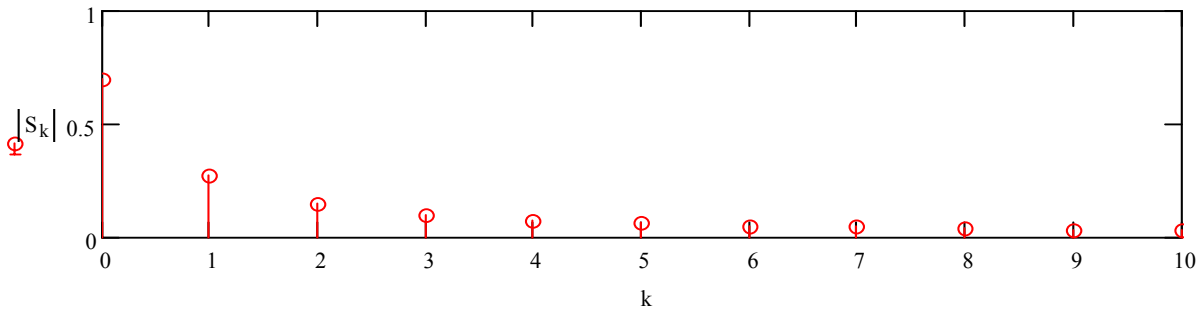
$$\dot{C}_k = \frac{\dot{A}_k}{2} = \frac{1}{T} \int_{t_n}^{t_n+T} x(t) e^{-jk\omega_1 t} dt.$$

В нашем случае:

Спектр аналогового периодического сигнала определяется разложением в ряд Фурье:

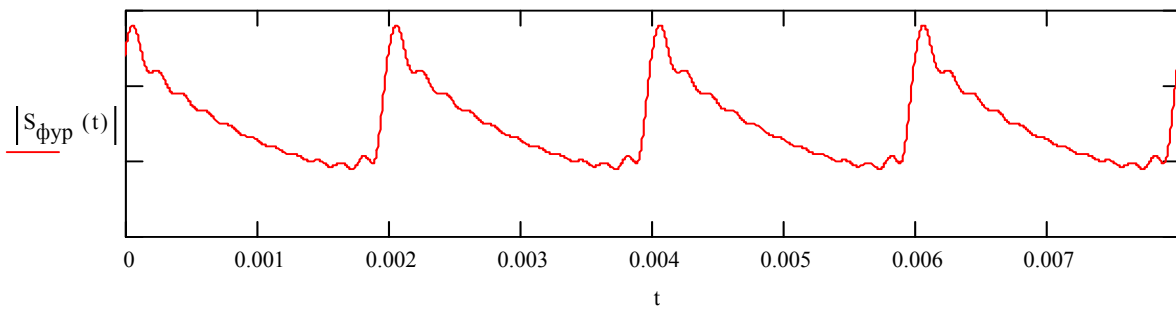
$$S_0 := \frac{1}{T} \cdot \int_0^T S_H(t) dt \quad S_k := \frac{2}{T} \cdot \int_0^T S_H(t) \cdot \exp(-j \cdot k \cdot \omega_1 \cdot t) dt$$

спектр сигнала при комплексной форме ряда Фурье



$$S_{\text{фур}}(t) := S_0 + \sum_{k=1}^{11} (S_k \cdot \exp(j \cdot k \cdot \omega_1 \cdot t))$$

восстановленный сигнал компл. рядом Фурье



$$a_0 := \frac{2}{T} \cdot \int_0^T S_H(t) dt$$

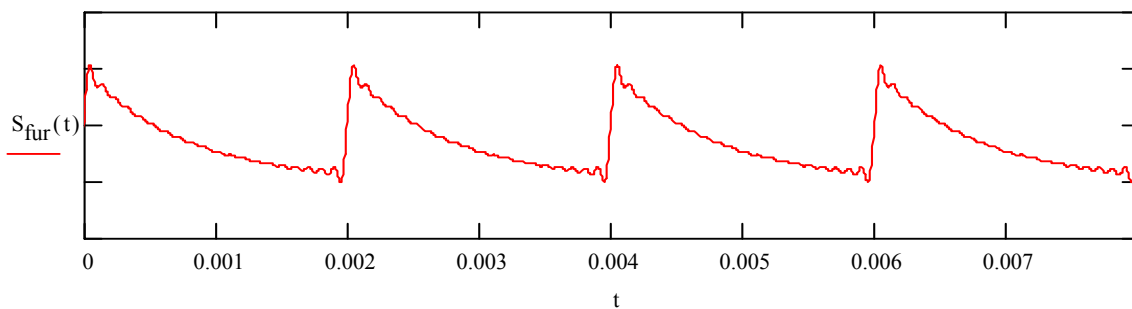
$$a_k := \frac{2}{T} \cdot \int_0^T S_H(t) \cdot \cos(k \cdot \omega_1 \cdot t) dt$$

$$b_k := \frac{2}{T} \cdot \int_0^T S_H(t) \cdot \sin(k \cdot \omega_1 \cdot t) dt$$

$$A_0 := \frac{a_0}{2}$$

$$S_{\text{фур}}(t) := A_0 + \sum_{k=1}^{20} (a_k \cdot \cos(k \cdot \omega_1 \cdot t) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega_1 \cdot t))$$

восстановленный сигнал тригоном. рядом Фурье



Для построения амплитудного спектра определяем амплитуду и частоту k-ой гармоники ($k > 0$)

$$A_k := \sqrt{(a_k)^2 + (b_k)^2} \quad f_k := k \cdot f_1$$

Значения амплитуд гармоник сводим в таблицу при $k := 10$ и $i := 0..k$

С учетом постоянной составляющей спектр амплитуд принимает вид :

$$C_i := \begin{cases} A_0 & \text{if } i = 0 \\ A_i & \text{if } i \neq 0 \end{cases}$$

$C_i =$

0.698
0.273
0.145
0.098
0.074
0.059
0.049
0.042
0.037
0.033
0.03

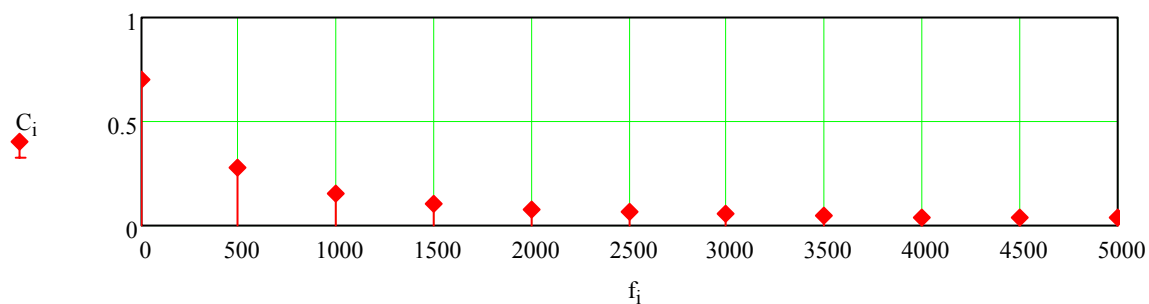
V

$f_i =$

0
500
1·10 ³
1.5·10 ³
2·10 ³
2.5·10 ³
3·10 ³
3.5·10 ³
4·10 ³
4.5·10 ³
5·10 ³

Hz

спектр сигнала при тригонометрической форме ряда Фурье



4. Расчет практической ширины спектра сигнала.

Сигналы, как правило, имеют конечную длительность и поэтому бесконечный спектр. Для практических расчетов ширину спектра можно ограничивать частотой среза ω_c . Тогда под практической шириной спектра понимают интервал $[0, \omega_c]$, внутри которого сосредоточена основная часть энергии (или мощности) сигнала, например 90% или 99%.

Ограничение спектра соответствует усечению ряда или интеграла Фурье. Оно ведет к погрешности $\delta(t) = x(t) - x^*(t)$ представления исходного сигнала $x(t)$ усеченной оценкой $x^*(t)$. Наиболее удобно эту погрешность оценивать с помощью среднеквадратичного критерия приближения. В зависимости от вида сигнала среднеквадратичная погрешность за счет ограничения спектра будет

$$\sigma^2 = \frac{1}{t_m} \int_0^{t_m} \delta^2(t) dt = \Delta P \Rightarrow \text{для мощностных сигналов}$$

(например, периодических);

$$\sigma^2 = \frac{1}{t_m} \int_0^{t_m} \delta^2(t) dt = \frac{\Delta E}{t_m} \Rightarrow \text{для энергетических сигналов} \quad (4.1)$$

(например, импульсных),

где $\Delta P = (1 - \gamma)P$ и $\Delta E = (1 - \gamma)E$ - соответственно средняя мощность и энергия отброшенной высокочастотной части спектра; γ - коэффициент, равный $0,9 \div 0,99$; t_m - длительность сигнала (например, его период).

Условие для выбора **практической ширины спектра** принимает вид:

$$a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_c} A_k^2 = \gamma \cdot P - \text{для тригонометрического ряда ;} \quad (4.2)$$

$$C_0^2 + 2 \sum_{k=1}^{n_c} |\dot{C}_k|^2 = \gamma \cdot P - \text{для комплексного ряда ;} \quad (4.3)$$

$$\frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\omega_c} A^2(\omega) d\omega = \gamma \cdot E - \text{для интегрального преобразования Фурье,} \quad (4.4)$$

где ω_c - частота среза (ограничения) спектра; n_c - число учитываемых гармоник спектра, причем $\omega_c = n_c \cdot \omega_1$.

В нашем случае:

Полная энергия импульса на сопротивлении $R = 1 \Omega$ будет иметь вид $E := \frac{1}{R} \cdot \left[\frac{-1}{2} \cdot \frac{e^{(-2) \cdot T \cdot \alpha}}{\alpha} \cdot U_m^2 + \frac{1}{2 \cdot \alpha} \cdot U_m^2 \right]$:

Практическая ширина спектра определяется частотой среза :

$$\omega_c := \alpha \cdot \tan \left[\gamma \cdot E \cdot \left(\frac{\pi \cdot R \cdot \alpha}{U_m^2} \right) \right] \quad \omega_c = 1.551 \times 10^4 \frac{1}{s} \quad f_c := \frac{\omega_c}{2\pi}$$

Таким образом, при $\gamma = 0.95$ частота среза спектра сигнала $f_c := \frac{\omega_c}{2\pi}$ и составит $f_c = 2.469 \text{ KHz}$, что соответствует 5-ой гармонике сигнала $n := 5$

При этом энергия, отбрасываемая при ограничении спектра составляет $\Delta E := (1 - \gamma) \cdot E$ $\Delta E = 1.866 \times 10^{-5} \text{ J}$
Относительная среднеквадратичная погрешность при ограничении сигнала по времени составляет

$$\sigma_{\text{отн}} := \sqrt{\frac{\Delta E}{E}} \cdot 100 \quad \sigma_{\text{отн}} = 22.361 \%$$

или

$$W := \frac{1}{R} \left(\int_0^T S_H(t)^2 dt \right) \quad P := \frac{W}{T} \quad \gamma \cdot P = 0.17727 \text{ W}$$

Пусть число учитываемых гармоник $n := 5$ и $i := 1..n$. Согласно спектральной теории мощность этих гармоник

$$P_{c_i} := \frac{1}{R} \cdot \left[\left(\frac{A_0}{2} \right)^2 + \sum_{k=1}^i \left[\frac{1}{2} \cdot (A_k)^2 \right] \right] \quad P_{c_n} = 0.17866 \text{ W}$$

$$E_{\Pi} := \frac{1}{T \cdot R} \cdot \frac{U_m^2}{\alpha^2 + \omega_c^2} \quad P_{\min} := \frac{E_{\Pi}}{T} \quad P_{\min} = 1.031 \times 10^{-3} \text{ W}$$

Абсолютный уровень $P_0 := 0.001 \text{ watt}$

$$\text{Верхняя граница динамического диапазона } L_C := 10 \cdot \log \left(\frac{P}{P_0} \right) \quad L_C = 22.709$$

$$\text{Нижняя граница динамического диапазона } L_{\Pi} := 10 \cdot \log \left(\frac{P_{\min}}{P_0} \right) \quad L_{\Pi} = 0.134$$

5. Расчет интервала дискретизации и разрядности кода.

В зависимости от модели детерминированного сигнала можно выделить два подхода к определению шага РВД:

- 1) по частотным характеристикам сигнала;
- 2) по производным сигнала.

В данном случае шаг РВД выбирается по теореме В. А. Котельникова. Здесь в качестве модели сигнала принимается функция, ограниченная по частоте. Такая функция не ограничена по времени и полностью определяется своими отсчетами, взятыми через интервал времени

$$\Delta t = \frac{\pi}{\omega_c} = \frac{1}{2f_c},$$

где f_c – граничная частота спектра функции $x(t)$ или частота среза. Эту функцию можно описать без погрешности полиномом Котельникова $K(t)$, т.е. с помощью функций отсчетов (ФО)

$$x(t) = K(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t_k) \frac{\sin \omega_c(t - t_k)}{\omega_c(t - t_k)} = \sum_{K=-\infty}^{\infty} x(t_k) \text{Sa}[\omega_c(t - t_k)],$$

где $t_k = k \Delta t$; $\text{Sa}(x)$ – функция отсчетов.

В нашем случае:

Граничная частота спектра сигнала $f_c := \frac{n}{T}$; $f_c = 2.5 \text{ KHz}$

Шаг дискретизации $\Delta t_p := \frac{1}{2 \cdot f_c}$; $\Delta t_p = 0.2 \text{ ms}$

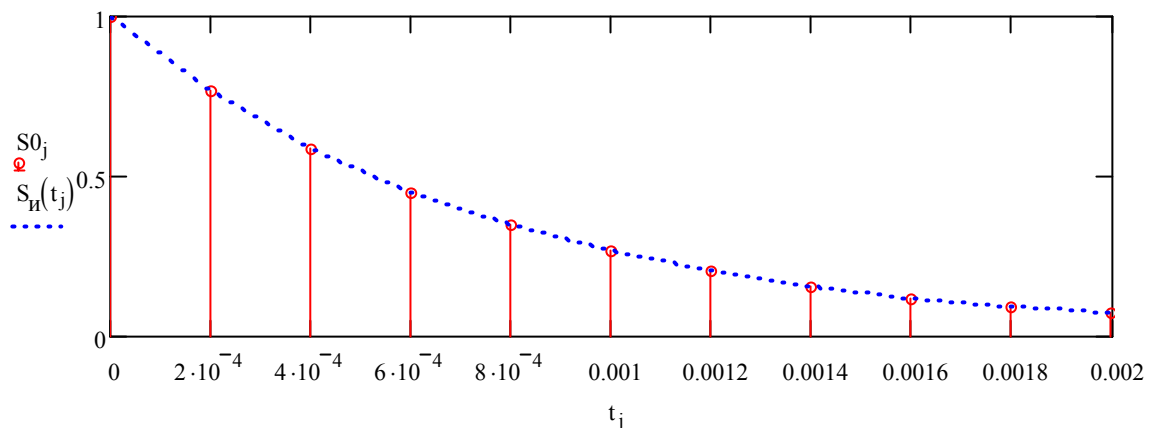
Число отсчетов $N_p := \frac{T}{\Delta t_p}$; $N_p = 10$

График дискретизированного по времени сигнала

Ступенчатая аппроксимирующая функция SQ (оценка)

$$j := 0..N_p \quad t_j := j \cdot \Delta t_p \quad S_{0j} := S_{\text{и}}(t_j)$$

дискретизированный по времени сигнал



Цифровое преобразование сигнала заключается в том, что функция непрерывного аргумента $S(t)$ ставится в соответствие упорядоченная последовательность целых чисел, то есть целочисленная функция целочисленного аргумента $Z(n)$. Существует множество способов аналого-цифрового преобразования. Среди получили широкое распространение методы *импульсно-кодовой модуляции* (ИКМ), *дифференциальной импульсно-кодовой модуляции* (ДИКМ) и *дельта-модуляции* (ДМ).

Цифровое преобразование сигнала состоит из трех отображений-дискретизации, квантования и кодирования.

Существуют различные способы выбора функции квантования. В простейшем случае, когда используется квантование с постоянным шагом $\Delta S = S_i - S_{i-1}$, функция квантования имеет вид:

$$Z_n = \begin{cases} S_1 & \text{при } S(n\Delta t) \leq (S_2 + S_1)/2 \\ S_i & \text{при } (S_i + S_{i-1})/2 < S(n\Delta t) \leq (S_{i+1} + S_i)/2 \\ S_N & \text{при } (S_N + S_{N-1})/2 < S(n\Delta t) \end{cases}$$

Каждый из уровней квантования кодируется числом. Обычно используются двоичные символы (0 и 1). Квантованные отсчеты $Z(n)$ кодируются двоичными числами с m разрядами. Число уровней квантования N и наименьшее число разрядов m двоичных чисел, кодирующих эти уровни, связаны соотношением:

$$m = \lceil \lg_2 N \rceil$$

Квантованием называется отображение множества $\{S\}$ на конечное множество целых чисел $\{Z\}$. Отображение $\{S\} \rightarrow \{Z\}$ выражается формулой:

$$Z = \left\lceil \frac{S}{\Delta S} \right\rceil$$

Правая часть выражения означает округление величины $\frac{S}{\Delta S}$ до ближайшего целого числа. Если величина ΔS постоянна, то квантование называется **равномерным**.

Кодированием называется представление каждого числа $Z \in \{Z\}$ в виде конечной последовательности символов, называемой **кодовым словом**.

При правильно выбранной частоте дискретизации точность преобразования аналогового сигнала в цифровой код определяется исходя из теоремы Котельникова величиной шага квантования ΔS . Погрешность преобразования тем меньше, чем меньше шаг квантования. Разность между исходным и квантованным значениями сигнала в дискретные моменты времени называется **шумом квантования** (ошибкой квантования). При фиксированном максимальном уровне входного сигнала шум квантования определяется числом уровней квантования – разрядностью аналого-цифрового преобразователя (АЦП).

При кодировании двоичными числами и длине кодового слова в m разрядов количество двоичных кодовых слов r составляет $r = 2^m$. Так, при $m = 16$ получим $r = 256$.

При линейной импульсно-кодовой модуляции мощность шума квантования определяется только шагом квантования:

$$P_{ш.кв.} = \frac{\Delta S^2}{12} = \frac{1}{12} \left(\frac{U_{\max}}{2^m} \right)^2$$

где U_{\max} - общий динамический диапазон сигнала.

Эффективное значение ошибки квантования

$$\varepsilon(\Delta S) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\Delta S}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{U_{\max}}{2^{m+1}}$$

Поскольку $P_{ш.кв.}$ не зависит от уровня входного сигнала, то с увеличением мощности входного сигнала P_c отношение $\frac{P_c}{P_{ш.кв.}}$ линейно растет до тех пор, пока не возникают шумы ограничения.

Уровень ограничения по входу АЦП определяется его максимальным входным рабочим напряжением. **Шумом ограничения** называется разность между исходным и ограниченным сигналами. Аналого-цифровой преобразователь рассчитывается таким способом, чтобы ограничения не возникали, то есть:

$$S_{с.макс} \leq U_{вх.АЦП.макс} ; S_{с.макс} = 2RS_{с.ср.}$$

Где R - пик-фактор сигнала, $S_{с.ср.}$ - среднеквадратическое значение сигнала. **В моем курсовом проекте** $U_{вх.АЦП.макс} = U_m$, то есть напряжению экспоненциального сигнала.

С учетом приведенных формул находим мощность шума:

$$P_{ш.кв.} \approx \frac{1}{3} \left(\frac{RS_{с.ср.}}{N} \right)^2$$

Мощность сигнала при сопротивлении 1 Ом $P = S_{с.ср.}^2$. Тогда

$$\frac{P_c}{P_{ш.кв.}} = \frac{3N^2}{R^2}$$

или

$$10 \lg \frac{P_c}{P_{ш.кв.}} = 20 \lg \frac{N}{R} + 4.8 [\text{дБ}]$$

В нашем случае:

Число уровней квантования и разрядность двоичного кода

Отношение сигнал-шум $CШ := 50$

Коэффициент амплитуды $КА := 38$

Число уровней квантования $L := \text{ceil}\left(КА \cdot \sqrt{\frac{CШ}{3}}\right)$ $L = 156$

Разрядность кода $n := \text{ceil}(\log(L, 2))$ $n = 8$

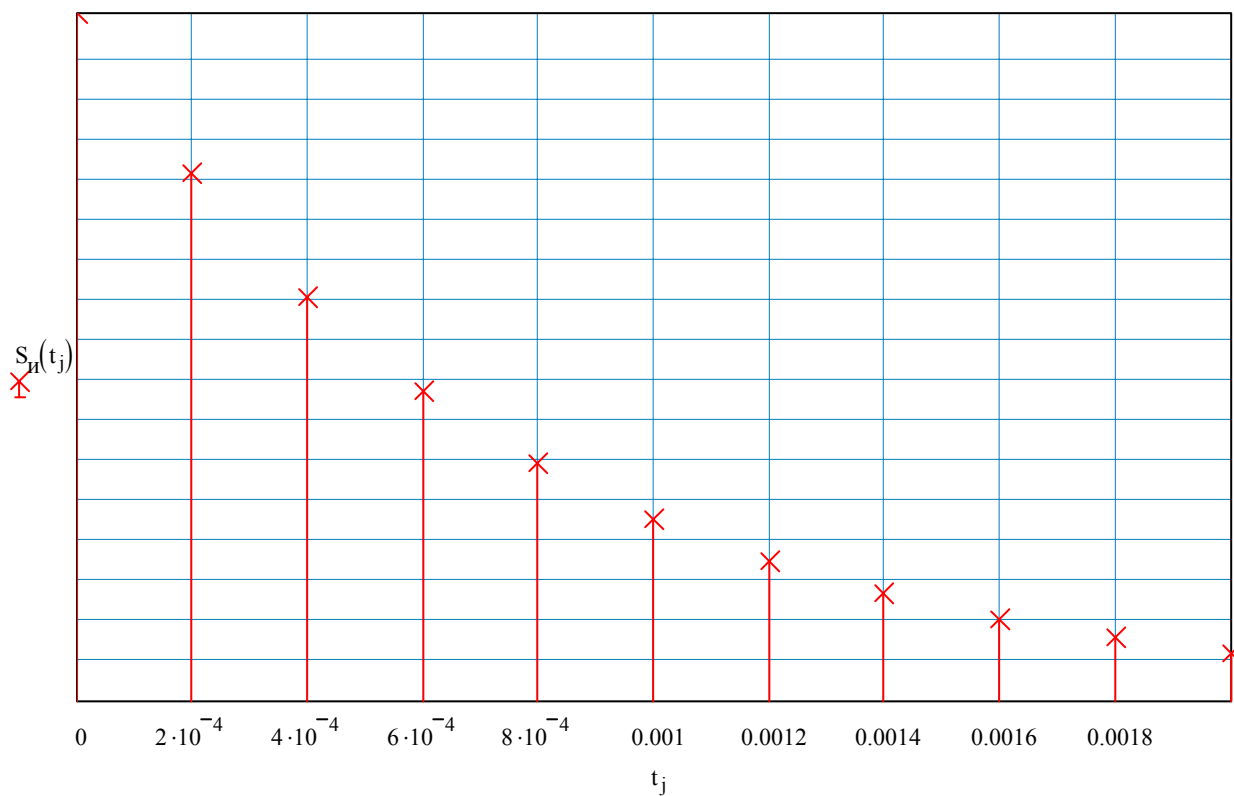
Так как разрядность кода $n = 8$, то число уровней квантования будет $L := 2^n$ $L = 256$

Ширина спектра $\Delta F := n \cdot f_c$ $\Delta F = 20 \text{ KHz}$

Длительность импульса $\tau := \frac{\Delta t_p}{n}$ $\tau = 25.000 \times 10^{-6} \text{ s}$

Шаг квантования $\Delta b := \frac{1}{L - 1}$ $\Delta b = 0.004$ $\frac{\Delta b}{2} = 0.002$

Динамический диапазон цифрового сигнала в дБ оценивается величиной $D_{ц} := 6(n - 1)$ $D_{ц} = 42$



С помощью трассировки найдем точки пересечения уровней квантования и дискретизации по времени :

$$KB := (1 \ 0.766 \ 0.587 \ 0.449 \ 0.344 \ 0.264 \ 0.202 \ 0.155 \ 0.118 \ 0.091)$$

$$UK := \frac{KB}{\Delta b} \quad UK - \text{уровни квантования}$$

$$UK =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	255	195	150	114	88	67	52	40	30	23

Перевод в двоичный код

$$\text{Binary}(X) := \left| \begin{array}{l} z \leftarrow \text{floor}\left(\frac{\ln(X)}{\ln(2)}\right) \\ \text{for } m \in 0..z \\ \quad b_{z-m} \leftarrow \text{mod}\left(\text{floor}\left(\frac{X}{2^m}\right), 2\right) \\ b^T \end{array} \right.$$

$$\text{Binary}(UK_{0,0}) = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)$$

$$\text{Binary}(UK_{0,5}) = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1)$$

$$\text{Binary}(UK_{0,1}) = (1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1)$$

$$\text{Binary}(UK_{0,6}) = (1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1)$$

$$\text{Binary}(UK_{0,2}) = (1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1)$$

$$\text{Binary}(UK_{0,7}) = (1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1)$$

$$\text{Binary}(UK_{0,3}) = (1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)$$

$$\text{Binary}(UK_{0,8}) = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0)$$

$$\text{Binary}(UK_{0,4}) = (1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1)$$

$$\text{Binary}(UK_{0,9}) = (1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1)$$

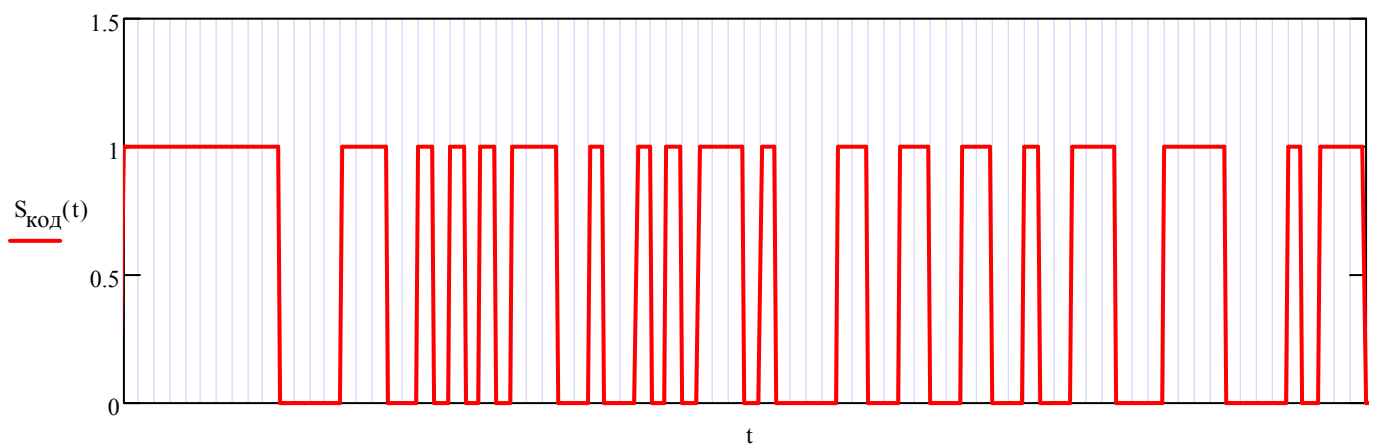
Так как код 8-ми разрядный в недостающие старшие разряды запишем нули и получим вектор :

$$M = (11111111110000111001010101110010010101110100001100110011001001110001111000010111)^T$$

Запишем функцию кодового сигнала

$$S_{\text{код}}(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t \leq 0 \\ 1 & \text{if } 0 < t \leq 10 \cdot \tau \\ 0 & \text{if } 10 \cdot \tau < t \leq 14 \cdot \tau \\ 1 & \text{if } 14 \cdot \tau < t \leq 17 \cdot \tau \\ 0 & \text{if } 17 \cdot \tau < t \leq 19 \cdot \tau \\ 1 & \text{if } 19 \cdot \tau < t \leq 20 \cdot \tau \\ 0 & \text{if } 20 \cdot \tau < t \leq 21 \cdot \tau \\ 1 & \text{if } 21 \cdot \tau < t \leq 22 \cdot \tau \\ 0 & \text{if } 22 \cdot \tau < t \leq 23 \cdot \tau \\ 1 & \text{if } 23 \cdot \tau < t \leq 24 \cdot \tau \\ 0 & \text{if } 24 \cdot \tau < t \leq 25 \cdot \tau \\ 1 & \text{if } 25 \cdot \tau < t \leq 28 \cdot \tau \\ 0 & \text{if } 28 \cdot \tau < t \leq 30 \cdot \tau \\ 1 & \text{if } 30 \cdot \tau < t \leq 31 \cdot \tau \\ 0 & \text{if } 31 \cdot \tau < t \leq 33 \cdot \tau \\ 1 & \text{if } 33 \cdot \tau < t \leq 34 \cdot \tau \\ 0 & \text{if } 34 \cdot \tau < t \leq 35 \cdot \tau \\ 1 & \text{if } 35 \cdot \tau < t \leq 36 \cdot \tau \\ 0 & \text{if } 36 \cdot \tau < t \leq 37 \cdot \tau \\ 1 & \text{if } 37 \cdot \tau < t \leq 40 \cdot \tau \\ 0 & \text{if } 40 \cdot \tau < t \leq 41 \cdot \tau \\ 1 & \text{if } 41 \cdot \tau < t \leq 42 \cdot \tau \\ 0 & \text{if } 42 \cdot \tau < t \leq 46 \cdot \tau \\ 1 & \text{if } 46 \cdot \tau < t \leq 48 \cdot \tau \\ 0 & \text{if } 48 \cdot \tau < t \leq 50 \cdot \tau \\ 1 & \text{if } 50 \cdot \tau < t \leq 52 \cdot \tau \\ 0 & \text{if } 52 \cdot \tau < t \leq 54 \cdot \tau \\ 1 & \text{if } 54 \cdot \tau < t \leq 56 \cdot \tau \\ 0 & \text{if } 56 \cdot \tau < t \leq 58 \cdot \tau \\ 1 & \text{if } 58 \cdot \tau < t \leq 59 \cdot \tau \\ 0 & \text{if } 59 \cdot \tau < t \leq 61 \cdot \tau \\ 1 & \text{if } 61 \cdot \tau < t \leq 64 \cdot \tau \\ 0 & \text{if } 64 \cdot \tau < t \leq 67 \cdot \tau \\ 1 & \text{if } 67 \cdot \tau < t \leq 71 \cdot \tau \\ 0 & \text{if } 71 \cdot \tau < t \leq 75 \cdot \tau \\ 1 & \text{if } 75 \cdot \tau < t \leq 76 \cdot \tau \\ 0 & \text{if } 76 \cdot \tau < t \leq 77 \cdot \tau \\ 1 & \text{if } 77 \cdot \tau < t \leq 80 \cdot \tau \\ 0 & \text{if } 80 \cdot \tau < t \end{cases}$$

Кодовый сигнал



6. Расчет автокорреляционной функции и энергетического спектра кодового сигнала.

Корреляция (correlation), и ее частный случай для центрированных сигналов – ковариация, является методом анализа сигналов. Приведем один из вариантов использования метода. Допустим, что имеется сигнал $s(t)$, в котором может быть (а может и не быть) некоторая последовательность $x(t)$ конечной длины T , временное положение которой нас интересует. Для поиска этой последовательности в скользящем по сигналу $s(t)$ временном окне длиной T вычисляются скалярные произведения сигналов $s(t)$ и $x(t)$. Тем самым мы "прикладываем" искомый сигнал $x(t)$ к сигналу $s(t)$, скользя по его аргументу, и по величине скалярного произведения оцениваем степень сходства сигналов в точках сравнения.

В варианте автокорреляции (autocorrelation) по аналогичной методике производится определение скалярного произведения сигнала $s(t)$ с собственной копией, скользящей по аргументу. Автокорреляция позволяет оценить среднестатистическую зависимость текущих отсчетов сигнала от своих предыдущих и последующих значений (так называемый радиус корреляции значений сигнала), а также выявить в сигнале наличие периодически повторяющихся элементов.

АКФ (correlation function, CF) сигнала $s(t)$, конечного по энергии, является количественной интегральной характеристикой формы сигнала, и определяется интегралом от произведения двух копий сигнала $s(t)$, сдвинутых относительно друг друга на время τ :

$$B_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) s(t+\tau) dt = \langle s(t), s(t+\tau) \rangle = \|s(t)\| \|s(t+\tau)\| \cos \varphi(\tau).$$

Как следует из этого выражения, АКФ является скалярным произведением сигнала и его копии в функциональной зависимости от переменной величины значения сдвига τ . Соответственно, АКФ имеет физическую размерность энергии, а при $\tau = 0$ значение АКФ непосредственно равно энергии сигнала:

$$B_s(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)^2 dt = E_s.$$

Спектральная плотность АКФ может быть определена из следующих простых соображений.

В соответствии с выражением (8.1.1) АКФ представляет собой функцию скалярного произведения сигнала и его копии, сдвинутой на интервал τ , при $-\infty < \tau < \infty$:

$$B_s(\tau) = \langle s(t), s(t-\tau) \rangle.$$

Скалярное произведение может быть определено через спектральные плотности сигнала и его копии, произведение которых представляет собой спектральную плотность взаимной мощности:

$$\langle s(t), s(t-\tau) \rangle = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) S_{\tau}^*(\omega) d\omega.$$

Смещение сигнала по оси абсцисс на интервал τ отображается в спектральном представлении умножением спектра сигнала на $\exp(-j\omega\tau)$, а для сопряженного спектра на множитель $\exp(j\omega\tau)$:

$$S_{\tau}^*(\omega) = S^*(\omega) \cdot \exp(j\omega\tau).$$

С учетом этого получаем:

$$\begin{aligned} B_s(\tau) &= (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) S^*(\omega) \cdot \exp(j\omega\tau) d\omega = \\ &= (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 \exp(j\omega\tau) d\omega. \end{aligned} \quad (8.3.1)$$

Но последнее выражение представляет собой обратное преобразование Фурье энергетического спектра сигнала (спектральной плотности энергии). Следовательно, энергетический спектр сигнала и его автокорреляционная функция связаны преобразованием Фурье:

$$B_s(\tau) \leftrightarrow |S(\omega)|^2 = W_s(\omega). \quad (8.3.2)$$

Аналогичный результат может быть получен и прямым преобразованием Фурье автокорреляционной функции:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} B_s(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) s(t-\tau) \exp(-j\omega\tau) dt d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-j\omega t) dt \int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau) \exp(j\omega(t+\tau)) d(t+\tau) d\tau = S(\omega) S^*(\omega) = W_s(\omega). \end{aligned}$$

Таким образом, спектральная плотность АКФ есть не что иное, как спектральная плотность мощности сигнала, которая, в свою очередь, может определяться прямым преобразованием Фурье через АКФ:

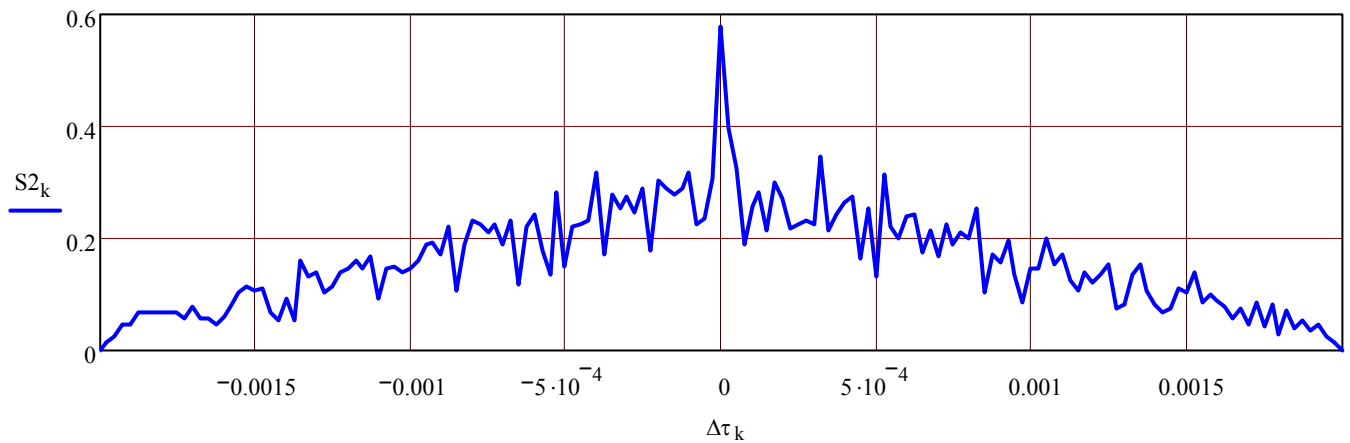
$$|S(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} B_s(\tau) \cdot \exp(-j\omega\tau) d\tau. \quad (8.3.3)$$

В нашем случае:

Расчет автокорреляционной функции и энергетического спектра

$$k := 0..160 \quad \Delta\tau_k := -T + \tau \cdot k \quad S2_k := \frac{1}{T} \cdot \int_0^T S_{\text{код}}(t) \cdot S_{\text{код}}(t + \Delta\tau_k) dt$$

АКФ кодового сигнала

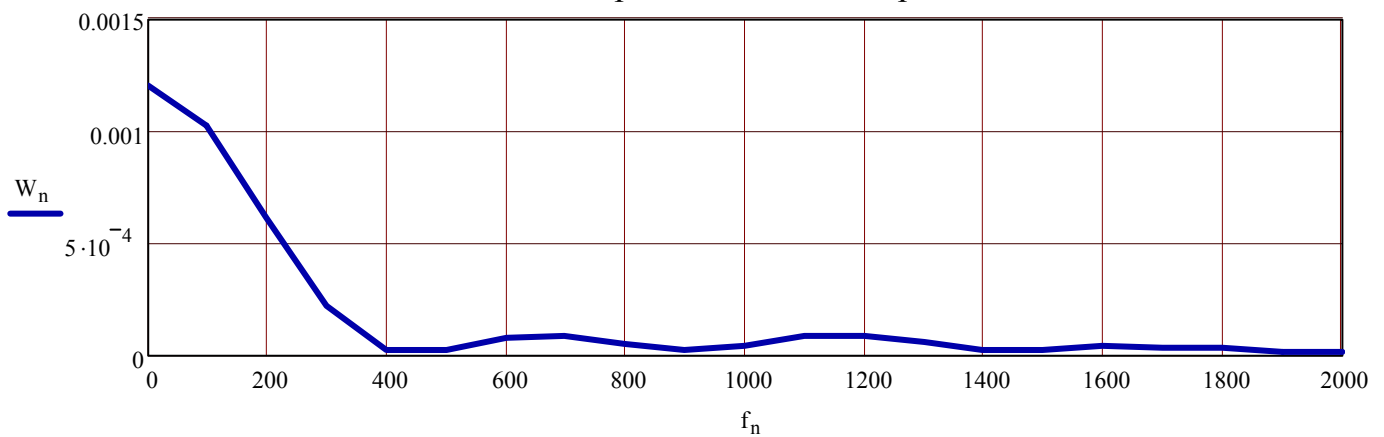


$$A := \text{lspline}(\Delta\tau, S2) \quad B(x) := \text{interp}(A, \Delta\tau, S2, x)$$

$$Df := 100 \text{ Hz} \quad N := 20 \quad n := 0..N \quad f_n := Df \cdot n$$

$$W_n := 4 \cdot \int_0^T B(x) \cdot \cos(2\pi \cdot f_n \cdot x) dx$$

энергетический спектр



7. Расчет спектральных характеристик модулированного сигнала

В широком смысле **модуляция** – это отражение или **нанесение информации** на **носитель** или **переносчик** информации. В переводе с латинского “модуляция” – это мерность. Ее понимают как задание некоторого размера носителю.

В технике носителем информации является физический сигнал, например ток или напряжение. В теории рассматривают математическую модель сигнала-носителя. В общем случае это некоторая функция времени $x_n(t, a_1, a_2, \dots, a_n)$, где $a_1 \div a_n$ – параметры носителя.

Простейший носитель – это постоянная величина, характеризуется только одним параметром “х” (рис.7.1а). Информация здесь может быть отражена изменением параметра “х” (7.1б). Этот процесс отражения называют **прямой модуляцией** ПМ. В результате прямой модуляции получают сигнал $x(t)$, несущий информацию.



Рис.7.1

Прямая модуляция характерна для этапа восприятия информации. Ее осуществляют первичные измерительные преобразователи и различные датчики.

Прямую модуляцию обычно не рассматривают. Считают, что исходной информацией является сигнал $x(t)$. Далее решают задачу: путем модуляции нанести эту информацию на носитель $x_n(t, a_1, a_2, \dots, a_n)$. Для этого с помощью сигнала $x(t)$ изменяют один или несколько параметров носителя. В результате, например, имеем: $x_n(t, a_1, a_2 + \Delta a_2(t), \dots, a_n)$ – модулированный сигнал; $\Delta a_2(t) = kx(t)$ – переменная составляющая параметра; $x(t)$ – модулирующий сигнал (информационный).

Таким образом, в узком смысле модуляция – это изменение одного или нескольких параметров носителя с помощью сигнала, несущего информацию. Обратная операция, т.е. выделение информационного сигнала $x(t)$ из модулированного сигнала, называется **демодуляцией**.

Манипуляция – это разновидность непрерывной модуляции. Под манипуляцией понимают скачкообразное изменение параметров носителя. Такое изменение имеет место, когда информационный сигнал $x(t)$ дискретен, а именно имеет вид последовательности прямоугольных импульсов.

Различают амплитудную (АМн), частотную (ЧМн) и фазовую (ФМн) манипуляции (рис.7.2).

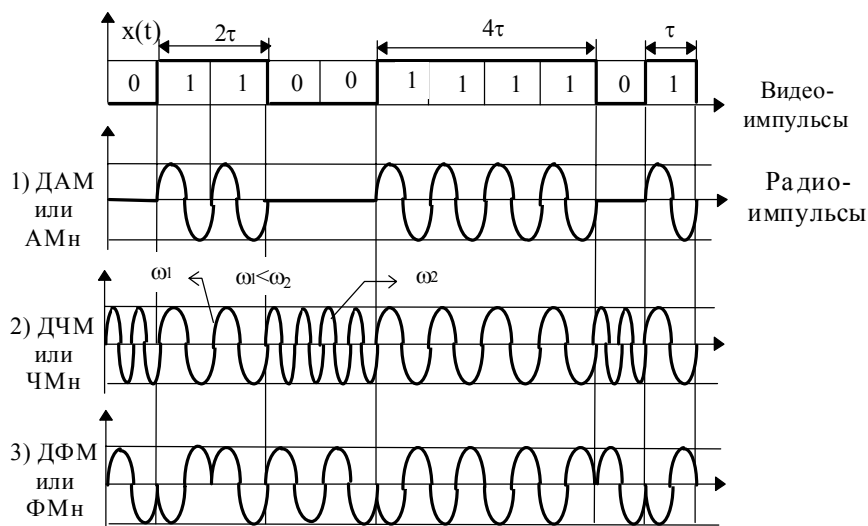


Рис.7.2

При угловой модуляции (angle modulation) в несущем гармоническом колебании $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ значение амплитуды колебаний U_m остается постоянным, а информация $s(t)$ переносится либо на частоту ω , либо на фазовый угол φ . И в том, и в другом случае текущее значение фазового угла гармонического колебания $u(t)$ определяет аргумент $\psi(t) = \omega t + \varphi$, который называют *полной фазой* колебания.

Фазовая модуляция (ФМ, phase modulation - PM). При фазовой модуляции значение фазового угла постоянной несущей частоты колебаний ω_0 пропорционально амплитуде модулирующего сигнала $s(t)$. Соответственно, уравнение ФМ – сигнала определяется выражением:

$$u(t) = U_m \cos[\omega_0 t + k \cdot s(t)], \quad (7.2.1)$$

где k – коэффициент пропорциональности. Пример однотонового ФМ – сигнала приведен на рис.7.2.1.

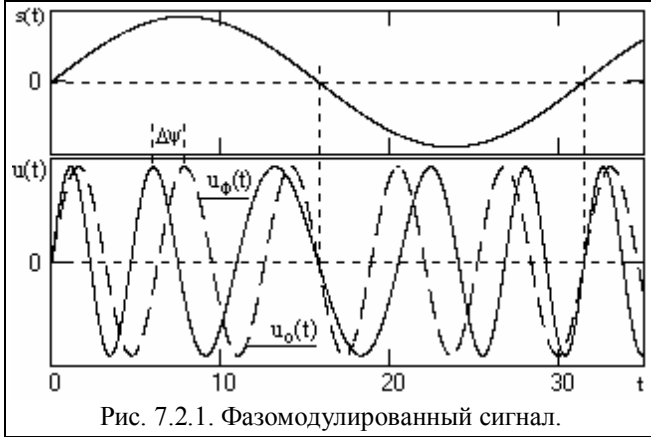


Рис. 7.2.1. Фазомодулированный сигнал.

При $s(t) = 0$, ФМ – сигнал является простым гармоническим колебанием и показан на рисунке функцией $u_0(t)$. С увеличением значений $s(t)$ полная фаза колебаний $\psi(t) = \omega_0 t + k \cdot s(t)$ нарастает во времени быстрее и опережает линейное нарастание $\omega_0 t$. Соответственно, при уменьшении значений $s(t)$ скорость роста полной фазы во времени падает. В моменты экстремальных значений $s(t)$ абсолютное значение фазового сдвига $\Delta\psi$ между ФМ – сигналом и значением $\omega_0 t$ немодулированного колебания также является максимальным и носит название *девиации фазы* (вверх $\Delta\varphi_v = k \cdot s_{\max}(t)$, или вниз $\Delta\varphi_n = k \cdot s_{\min}(t)$ с учетом знака экстремальных значений модулирующего сигнала).

Для колебаний с угловой модуляцией применяется также понятие мгновенной частоты (instantaneous frequency), под которой понимают производную от полной фазы по времени:

$$\omega(t) = \psi(t)/dt = \omega_0 + k \, ds(t)/dt.$$

Полная фаза колебаний в произвольный момент времени может быть определена интегрированием мгновенной частоты:

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^t \omega(t) \, dt, \quad \text{или} \quad \psi(t) = \int_0^t \omega(t) \, dt + \varphi_0.$$

Частотная модуляция (ЧМ, frequency modulation - FM) характеризуется линейной связью модулирующего сигнала с мгновенной частотой колебаний, при которой мгновенная частота колебаний образуется сложением частоты высокочастотного несущего колебания ω_0 со значением амплитуды модулирующего сигнала с определенным коэффициентом пропорциональности:

$$\omega(t) = \omega_0 + k \cdot s(t). \quad (7.2.2)$$

Соответственно, полная фаза колебаний:

$$\psi(t) = \omega_0(t) + k \int_{-\infty}^t s(t) \, dt, \quad \text{или} \quad \psi(t) = \omega_0(t) + k \int_0^t s(t) \, dt + \varphi_0.$$

Уравнение ЧМ – сигнала:

$$u(t) = U_m \cos(\omega_0 t + k \int_0^t s(t) \, dt + \varphi_0). \quad (7.2.3)$$

Аналогично ФМ, для характеристики глубины частотной модуляции используются понятия *девиации частоты вверх* $\Delta\omega_v = k \cdot s_{\max}(t)$, и *вниз* $\Delta\omega_n = k \cdot s_{\min}(t)$.

Частотная и фазовая модуляция взаимосвязаны. Если изменяется начальная фаза колебания, изменяется и мгновенная частота, и наоборот. По этой причине их и объединяют под общим названием угловой модуляции (УМ). По форме колебаний с угловой модуляцией невозможно определить, к какому виду модуляции относится данное колебание, к ФМ или ЧМ, а при достаточно гладких функциях $s(t)$ формы сигналов ФМ и ЧМ вообще практически не отличаются.

Однотоновая угловая модуляция. Рассмотрим гармонический модулирующий сигнал с постоянной частотой колебаний Ω . Начальная фаза колебаний:

$$\varphi(t) = \beta \sin(\Omega t),$$

где β – индекс угловой модуляции (modulation index), которым задается интенсивность колебаний начальной фазы. Полная фаза модулированного сигнала с учетом несущей частоты ω_0 :

$$\psi(t) = \omega_0 t + \beta \sin(\Omega t).$$

Уравнение модулированного сигнала:

$$u(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \beta \sin(\Omega t)). \quad (7.2.4)$$

Мгновенная частота колебаний:

$$\omega(t) = d\psi(t)/dt = \omega_0 + \beta \Omega \cos(\Omega t).$$

Как следует из этих формул, и начальная фаза, и мгновенная частота изменяется по гармоническому закону. Максимальное отклонение от среднего значения ω_0 равно $\omega_d = \beta \Omega$, и получило название *девиации частоты* (frequency deviation). Отсюда, индекс угловой модуляции равен отношению девиации частоты к частоте модулирующего сигнала:

$$\beta = \omega_d / \Omega. \quad (7.2.5)$$

Различия между частотной и фазовой модуляцией проявляются при изменении частоты Ω модулирующего сигнала.

При фазовой модуляции девиация частоты прямо пропорциональна Ω , а индекс угловой модуляции от частоты модулирующего сигнала не зависит:

$$\beta = \text{const}, \quad \omega_d = \beta \Omega.$$

Напротив, при ЧМ постоянным параметром модуляции является девиация частоты, при этом индекс модуляции обратно пропорционален частоте модулирующего сигнала:

$$\omega_d = \text{const}, \quad \beta = \omega_d / \Omega.$$

Спектры сигналов с угловой модуляцией.

Формулу (9.2.4) однотоновой модуляции можно преобразовать к виду:

$$u(t) = U_m \cos(\beta \cdot \sin(\Omega t)) \cos(\omega_0 t) - U_m \sin(\beta \cdot \sin(\Omega t)) \sin(\omega_0 t). \quad (7.2.6)$$

При малых значениях индекса угловой модуляции ($\beta \ll 1$, узкополосная модуляция) имеют место приближенные равенства:

$$\cos(\beta \cdot \sin(\Omega t)) \approx 1, \quad \sin(\beta \cdot \sin(\Omega t)) \approx \beta \cdot \sin(\omega_0 t).$$

При их использовании в (9.2.6), получаем:

$$u(t) \approx U_m \cos(\omega_0 t) + (\beta U_m / 2) \cos[(\omega_0 + \Omega)t] + (-\beta U_m / 2) \cos[(\omega_0 - \Omega)t]. \quad (7.2.7)$$

Сравнение данного выражения с формулой АМ – сигнала (9.1.4) позволяет сделать вывод, что амплитудные спектры однотоновых ФМ и ЧМ сигналов при $\beta \ll 1$ практически аналогичны АМ сигналам и также содержат верхнюю и нижнюю боковые частоты $\omega_0 + \Omega$ и $\omega_0 - \Omega$. Различие заключается только в смене знака амплитуды нижней боковой частоты на минус, т.е. в дополнительном фазовом сдвиге нижней боковой частоты на 180° относительно верхней боковой частоты. Соответственно, гармонические АМ сигналы могут быть трансформированы в ЧМ сигналы изменением на 180° начальной фазы одной из боковых полос. Заметим также, что при малых значениях индекса β основная мощность сигнала приходится на несущую частоту.

Математическая модель однотоновых ЧМ и ФМ сигналов с любым значением индекса модуляции β в общем случае получается разложением функции (9.2.4) в следующий ряд:

$$u(t) = U_m \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(m) \cos[(\omega_0 + k\Omega)t],$$

где $J_k(m)$ – функция Бесселя k -го индекса от аргумента $m = \beta$. Из этого уравнения следует, что спектр сигнала содержит бесконечное число составляющих – нижних и верхних боковых колебаний, с частотами $\omega_0 \pm k\Omega$, которые соответствуют гармоникам частоты модуляции, и с амплитудами, пропорциональными значениям $J_k(m)$. Амплитуды пяти первых гармоник и несущей частоты при $U_m = 1$ в зависимости от индекса модуляции приведены на рис. 7.2.2.

При малой величине индекса β значимые амплитудные значения имеют только первые гармоники. С ростом величины β

количество значимых боковых составляющих увеличивается, а энергия сигнала перераспределяется на боковые составляющие. Функции Бесселя имеют колебательный характер, поэтому спектр при удалении от несущей частоты ω_0 спадает немонотонно. На рис. 9.2.2 можно также видеть, что при определенных значениях индекса модуляции (2.405, 5.52, 8.654 и т.д.) несущая частота ω_0 в спектре сигнала полностью отсутствует. Форма физических амплитудных спектров модулированных сигналов относительно несущей частоты при разных индексах модуляции приведена на рис. 7.2.3.

С ростом индекса модуляции полоса частот, занимаемая сигналом, расширяется. Практическая ширина спектра сигнала с угловой модуляцией определяется по формуле:

$$\Pi_{\text{практ}} = 2(\beta + 1)\Omega, \quad (7.2.8)$$

т.е. спектральными составляющими с номерами $k > (\beta + 1)$ пренебрегают. Формирование реальных сигналов, как правило, выполняется при $\beta \gg 1$, при этом эффективная ширина спектра равна удвоенной девиации частоты:

$$\Pi_{\text{практ}} \approx 2\beta\Omega = 2\omega_d. \quad (7.2.9)$$

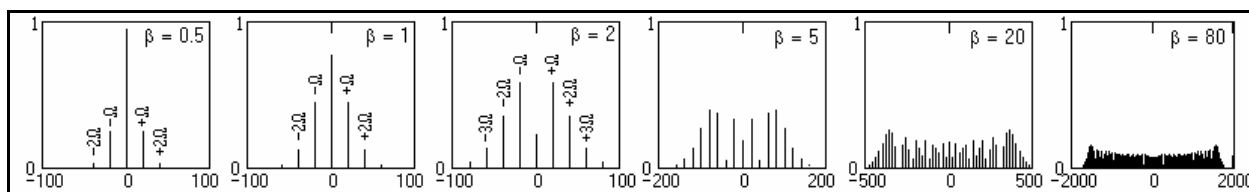


Рис. 7.2.3. Модули спектров ЧМ сигнала при разных индексах модуляции.
(несущая частота 2500 Гц, гармоника модуляции 25 Гц, шкала частот в Гц относительно несущей)

Отсюда следует, что по сравнению с АМ – сигналами, полоса частот которых равна 2Ω , для передачи сигналов с угловой модуляцией требуется полоса частот, в β раз большая. С другой стороны, именно широкополосность ЧМ и ФМ сигналов обеспечивает их большую помехоустойчивость по сравнению с АМ сигналами.

Для функций Бесселя имеет также место: $J_k(m) = (-1)^k J_k(m)$. Это означает, что начальные фазы боковых колебаний с частотами $\omega_0 + k\Omega$ и $\omega_0 - k\Omega$ совпадают при четных k , и отличаются на 180° при нечетных k .

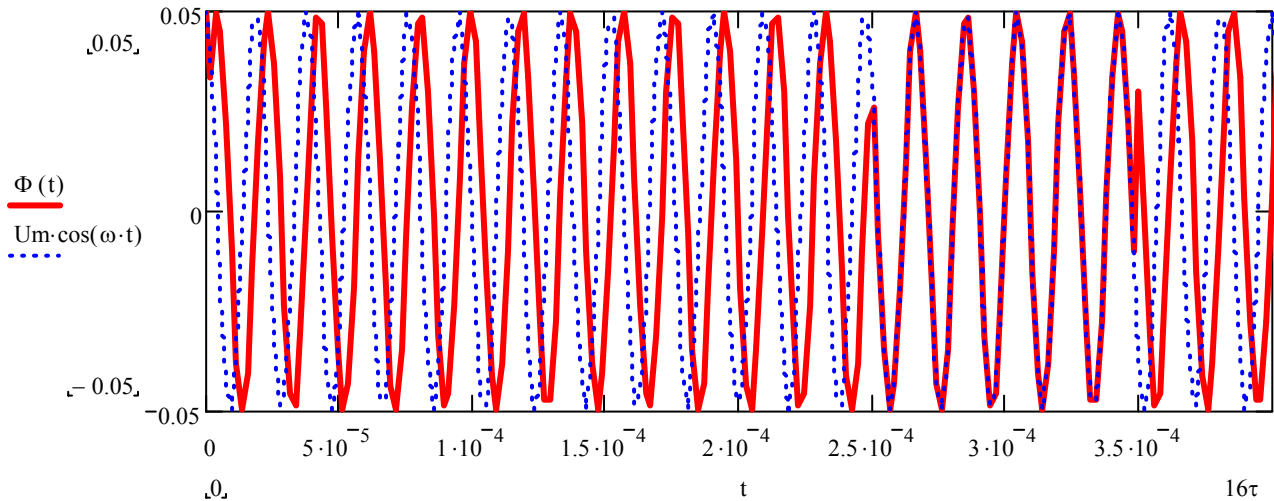
В нашем случае:

Расчет фазомодулированного сигнала

$$U_m := 0.05 \text{ V} \quad f := 0.45 \text{ MHz} \quad \omega := 2\pi \cdot f \quad m_d := 1.5 \quad t := 0, \frac{T}{1005} \dots T$$

$$\Phi(t) := U_m \cos(\omega \cdot t + m_d S_{\text{код}}(t))$$

ФМ кодового сигнала в пределах 16 разрядов



В моменты экстремальных значений $S_{\text{код}}(t)$ абсолютное значение фазового сдвига между ФМ-сигналом и значением $\omega \cdot t$ немодулированного колебания также является максимальным и носит название - ДЕВИАЦИИ фазы .

Расчет спектра модулированного сигнала

$$n := 5 \quad i := 0 \dots n$$

$$Am_i := U_m \cdot |J_n(i, m_d)|$$

$$f_{\text{спектр}_i} := \omega + i \cdot \omega_1$$

$$f_{\text{спектр}_i} := \omega - i \cdot \omega_1$$

$$Am_i =$$

0.026
0.028
0.012
$3.048 \cdot 10^{-3}$
$5.884 \cdot 10^{-4}$
$8.997 \cdot 10^{-5}$

V

$$f_{\text{спектр}_i} =$$

$2.827 \cdot 10^6$
$2.831 \cdot 10^6$
$2.834 \cdot 10^6$
$2.837 \cdot 10^6$
$2.84 \cdot 10^6$
$2.843 \cdot 10^6$

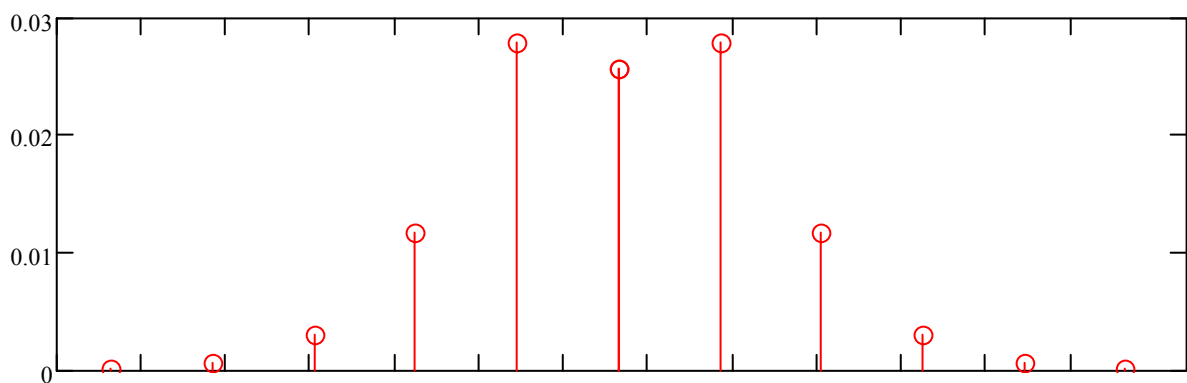
$\frac{1}{s}$

$$f_{\text{спектр}_i} =$$

$2.827 \cdot 10^6$
$2.824 \cdot 10^6$
$2.821 \cdot 10^6$
$2.818 \cdot 10^6$
$2.815 \cdot 10^6$
$2.812 \cdot 10^6$

$\frac{1}{s}$

Спектр модулированного сигнала



Расчет фазоманипулированного сигнала

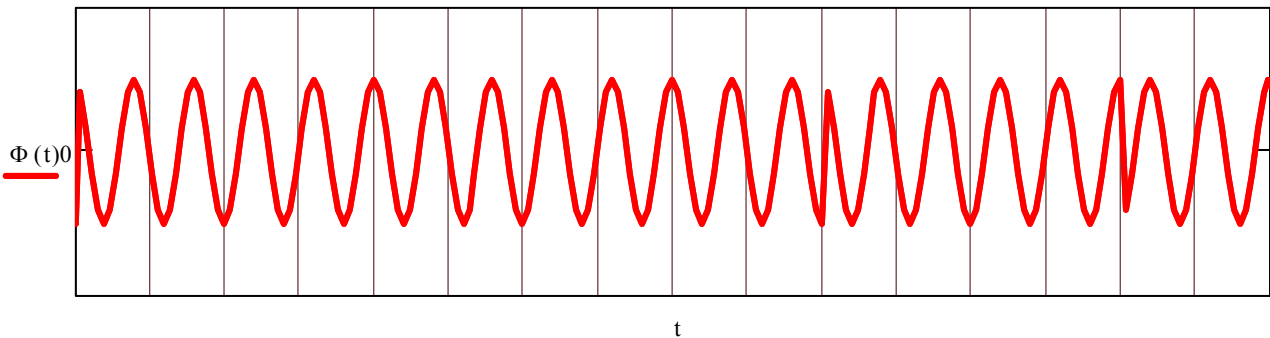
Рассчитаем спектр фазоманипулированного сигнала при передаче цифрового сообщения при дискрете фазы $\Delta\phi = \pi$

$$U := 0.05 \text{ volt} \quad f := 0.45 \text{ MHz} \quad \omega := 2\pi \cdot f$$

$$t := 0, \frac{T}{1000} \dots 4T$$

$$\Phi(t) := \begin{cases} U \cdot \cos(\omega \cdot t) & \text{if } S_{\text{код}}(t) = 1 \\ -U \cdot \cos(\omega \cdot t) & \text{if } S_{\text{код}}(t) = 0 \end{cases}$$

ФМ в пределах 16-ти разрядов



— фазовая манипуляция

$$\text{ORIGIN} := 1$$

$$m := 10$$

$$N := 20$$

$$k := 1..N$$

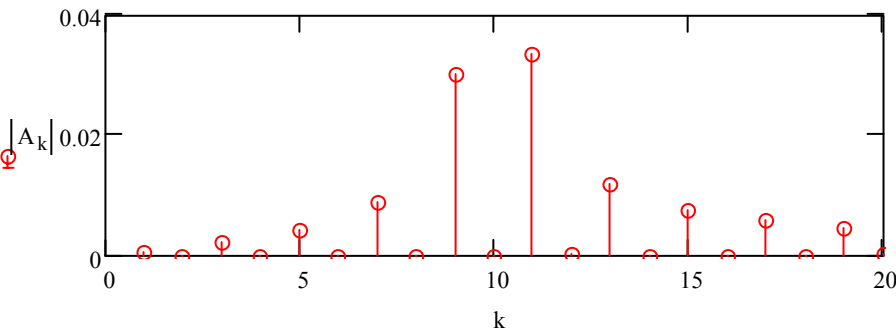
$$A_k := U \cdot \left(\frac{2}{\pi} \right) \cdot \left[\frac{\sin[(m-k) \cdot 0.5\pi]}{m-k} + \frac{\sin[(m+k) \cdot 0.5\pi]}{m+k} \right]$$

$$A_m = 0 \text{ V}$$

Спектр ФМ-сигнала

$$A_k =$$

6.431·10 ⁻⁴	V
0	
-2.099·10 ⁻³	
0	
4.244·10 ⁻³	
0	
-8.738·10 ⁻³	
0	
0.03	
0	
0.033	
0	
-0.012	
0	
7.639·10 ⁻³	
0	



Из проведенного расчета можно сделать выводы:

- в спектре фазоманипулированного сигнала при дискрете фазы $\Delta\phi = \pi$ спектральная составляющая с частотой несущих колебаний f отсутствует;
- большая часть мощности сосредоточена в боковых спектральных составляющих
- при небольших значениях m спектр асимметричен

8. Расчет мощности модулированного сигнала

Количество гармоник $n := 5$

$i := 0..n$

Полную среднюю мощность ФМ-сигнала можно определить как сумму мощностей его спектральных составляющих

$$P := 0.5 U_m^2 \cdot \left(J_0(m_d)^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^n J_n(i, m_d)^2 \right) \quad P = 1.25 \times 10^{-3} \text{ В}^2$$

Расчеты показывают, что не менее 99% энергии ФМ-сигнала при модуляции тональным сигналом частотой F сосредоточено в полосе $\Delta f = 2(1 + m_d) \cdot F$ и не менее 99,8% в полосе $\Delta f = 2(2 + m_d) \cdot F$

8. Расчет вероятности ошибки при воздействии белого шума

Оптимальное различение полностью известных сигналов

Для задач различения обоснованным является применение критерия идеального наблюдателя. Пусть принятое колебание представляет собой сумму:

$$u(t) = \lambda s_1(t) + (1 - \lambda)s_2(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T;$$

Здесь $n(t)$ – гауссовский белый шум, $s_1(t)$, $s_2(t)$ – детерминированные сигналы. Параметр λ может принимать одно из двух значений: $\lambda=1$ – присутствует только сигнал $s_1(t)$, $\lambda=0$ – присутствует только сигнал $s_2(t)$. Априорные вероятности присутствия каждого из сигналов известны. По принятой реализации нужно решить, какое именно значение имеет параметр λ , т.е. какой из сигналов присутствует в реализации.

Если алгоритм обнаружения полностью известного сигнала на фоне белого гауссовского шума состоит в вычислении

$$R_{cш}(0) = \int_0^T u(t)s_1(t)dt$$

корреляционной функции

и сравнения ее с порогом, то в случае задачи различения приемник, работающий по критерию идеального наблюдателя, должен состоять из двух корреляторов, вычисляющих значение

$$R_{cш1}(0) = \int_0^T u(t)s_1(t)dt \quad R_{cш2}(0) = \int_0^T u(t)s_2(t)dt$$

и

, вычитающего устройства, определяющего разность

$q = R_{cш1}(0) - R_{cш2}(0)$, и порогового устройства, на выходе которого принимаются решения: если $q > 0$, то на выходе есть сигнал $s_1(t)$, если $q < 0$, то есть сигнал $s_2(t)$ (см. рис. 3).

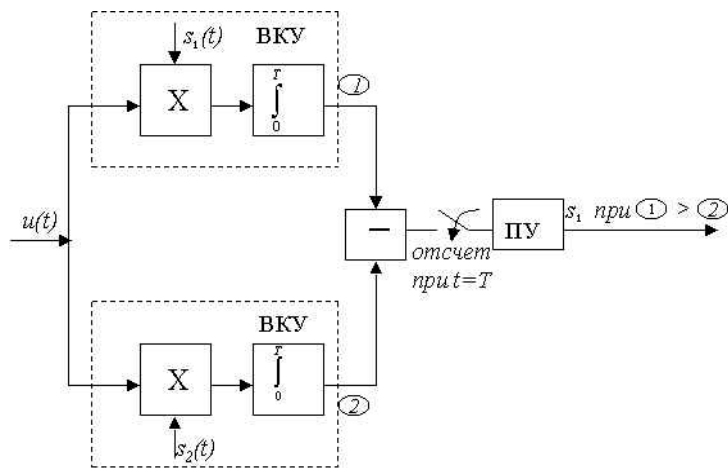


Рис. 3

Сам алгоритм принятия решения можно записать следующим образом:

$$q = \frac{2}{N_0} \int_0^T u(t)[s_1(t) - s_2(t)]dt$$

Если в $u(t)$ присутствует сигнал $s_1(t)$, то

$$q = q_1 = \frac{2}{N_0} \int_0^T [s_1(t) + n(t)][s_1(t) - s_2(t)]dt = \frac{2}{N_0} \int_0^T [s_1^2(t) - s_1(t)s_2(t) + n(t)s_1(t) - n(t)s_2(t)]dt = \frac{2}{N_0} \int_0^T [E_1^2 - s_1(t)s_2(t)]dt,$$

где E_1 - мощность сигнала $s_1(t)$ на интервале $0, T$. Если в принятом сигнале $u(t)$ присутствует $s_2(t)$, то

$$q = q_2 = \frac{2}{N_0} \int_0^T [s_1(t)s_2(t) - E_2] dt ,$$

где E_2 - мощность сигнала $s_2(t)$ на интервале $0, T$. Интеграл $\int_0^T s_1(t)s_2(t)dt$ характеризует коэффициент взаимной корреляции при нулевом сдвиге сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$.

Как показывает анализ, при равных мощностях сигналов $E_1=E_2=E$, равных вероятностях наличия первого или второго сигнала, плотности вероятности $p_1(q)$ и $p_2(q)$ имеют нормальный закон распределения с математическими ожиданиями m_1, m_2 и дисперсиями D_1 и D_2 , причем

$$m_1 = \frac{2E}{N_0}(1-r_s); \quad D_1 = \frac{4E}{N_0}(1-r_s);$$

$$m_2 = -\frac{2E}{N_0}(1-r_s); \quad D_2 = \frac{4E}{N_0}(1-r_s);$$

$$r_s = \frac{1}{E} \int_0^T s_1(t)s_2(t)dt$$

где

Графики $p_1(q)$ и $p_2(q)$ изображены на рис. 4

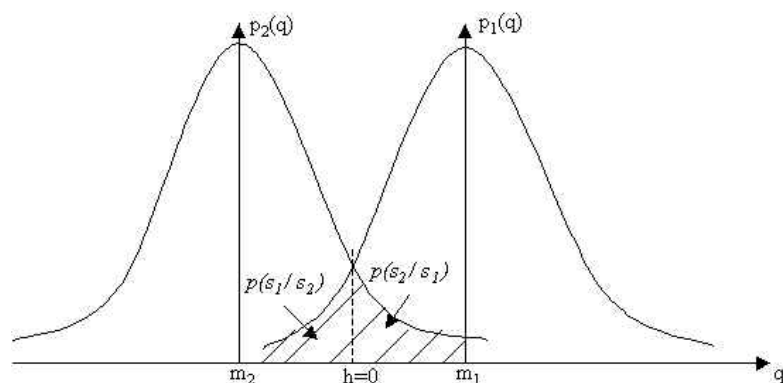


Рис. 4

Общий участок значений q (заштрихованная область) определяет условные вероятности принятия решения о наличии одного сигнала, когда в действительности присутствует другой. Они определяют вероятность ошибки в принятом решении.

Величина $h=m_1-m_2$ определяет порог принятого решения. Вероятность суммарной ошибки будет равна:

$$P_i = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}(1-r_s)\right)$$

где $\Phi(x)$ интеграл вероятности.

Меньшей вероятностью ошибки P_i обладают сигналы, для которых интервал взаимной корреляции минимален. Если $r_s=0$, то сигналы ортогональны, при $r_s=1$ имеет место равенство $s_1(t)=s_2(t)$, а при $r_s=-1$, $-s_1(t)=s_2(t)$. Лучше всего различать сигналы, имеющие $r_s=-1$. В этом случае говорят, что сигналы обладают наибольшей помехоустойчивостью при заданном отношении

сигнал/шум (E/N_0). Ясно, что чем меньше высота перекрытия, определяющего область неправильного принятия решения, тем больше вероятность ошибки. Линиями потенциальной помехоустойчивости называют кривые, характеризующие зависимость вероятности ошибки p_i от отношения сигнал/шум в оптимальном приемнике. На рис. 5 показаны такие кривые для детерминированных амплитудно-, частотно-, и фазо-манипулированных сигналов.

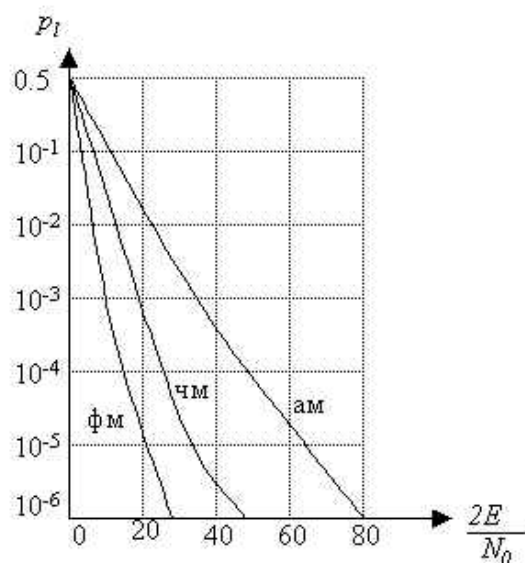


Рис. 5

Для амплитудно-манипулированных сигналов

$$\begin{aligned} s_1(t) &= S_m \cos(\omega t + \varphi); \\ s_2(t) &= 0, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

В этом случае на основе критерия идеального наблюдателя нужно решить задачу обнаружения сигнала $s_1(t)$ на фоне шума. При этом

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{2E}{N_0}; \quad m_2 = 0; \\ D_1 &= \frac{2E}{N_0}; \quad D_2 = \frac{2E}{N_0}; \quad E = \frac{S_m^2 T}{2}. \end{aligned}$$

При априорных вероятностях наличия и отсутствия сигнала, равных 0.5, порог принятия решения $h = \frac{m_1}{2} = \frac{E}{N}$. При таком пороге вероятность ошибки минимальна и равна

$$p_i = 1 - \Phi\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right).$$

Для частотно - манипулированных сигналов

$$\left. \begin{aligned} s_1(t) &= S_m \cos \omega_1 t \\ s_2(t) &= S_m \cos \omega_2 t \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq t \leq T.$$

Коэффициент взаимной корреляции при этом равен

$$r_s = \frac{\sin(\omega_2 - \omega_1)T}{(\omega_2 - \omega_1)T}$$

На практике величина $(\omega_2 - \omega_1)T \gg 1$, поэтому можно принять $r_s \approx 0$. Тогда вероятность ошибки будет равна

$$p_i = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right).$$

Для фазоманипулированных сигналов используются сигналы

$$\left. \begin{aligned} s_1(t) &= S_m \cos \omega t \\ s_2(t) &= -S_m \cos \omega t \end{aligned} \right\}, 0 < t \leq T$$

В этом случае $r_s = -1$ и вероятность ошибки равна

$$p_i = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right).$$

Сравнивая графики на рис. 5, видим, что при одной и той же энергии сигналов из трех рассмотренных видов манипуляции наибольшей потенциальной помехоустойчивостью обладает фазовая манипуляция.

Смысл рассмотрения оптимального приема детерминированных сигналов на фоне белого шума состоит в том, что результаты решения таких задач можно использовать в качестве теоретических «эталонов», позволяющих получить максимально возможную (потенциальную) помехоустойчивость. Результаты оптимальной обработки сигналов с неизвестными параметрами целесообразно сравнивать с соответствующими результатами для аналогичных сигналов с известными параметрами.

Расчет вероятности ошибки при воздействии белого шума

$$\text{Спектральная плотность помехи } W_{\Pi} := 10^{-13} \cdot \frac{\text{watt}}{\text{Hz}} \quad f_3 := 0.45 \cdot 10^6 \cdot \text{Hz} \quad T_{\text{пом}} := \frac{1}{f_3} \quad K_{\text{ос}_{\text{сиг}}} := 0.014$$

$$\text{Мощность помехи } P_{\Pi} := \frac{W_{\Pi}}{T_{\text{пом}}} \quad P_{\Pi} = 4.5 \times 10^{-8} \text{ W}$$

$$\text{Мощность сигнала на выходе фазового детектора } P_c := \frac{K_{\text{ос}_{\text{сиг}}}^2 \cdot U_m^2}{4 \cdot R} \quad P_c = 1.225 \times 10^{-7} \text{ W}$$

$$\text{Отношение сигнал-шум } S_w := \frac{P_c}{P_{\Pi}} \quad S_w = 2.722 \quad q_d := 10 \log(S_w) \quad q_d = 4.349$$

$$z(q_d) := \sqrt{2 \cdot 10^{0.1 \cdot q_d}}$$

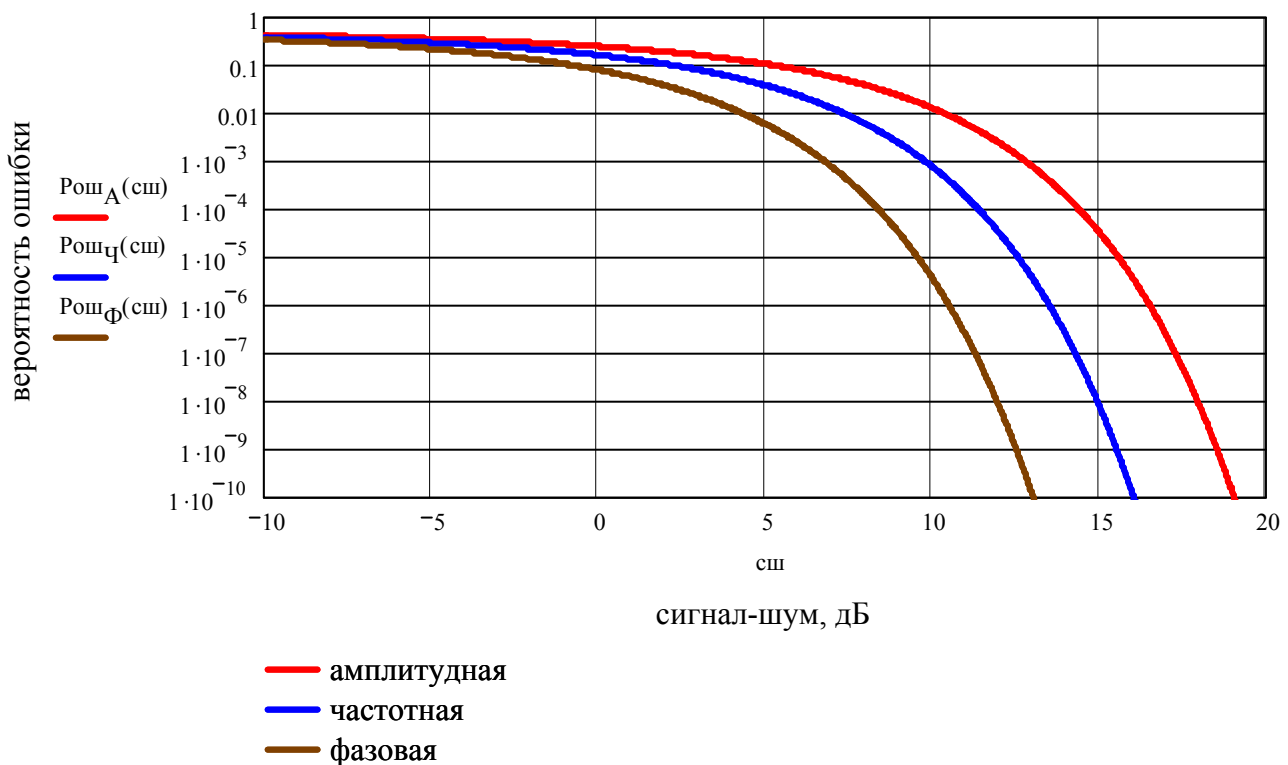
$$\text{Вероятность ошибки при фазовой модуляции } \Psi\Phi := 1 - \text{pnorm}(z(q_d), 0, 1) \quad \Psi\Phi = 9.8153 \times 10^{-3}$$

Рассчитаем вероятность ошибки для трех видов манипуляции: амплитудной, частотной и фазовой, сш выражен в дБ.

$$x(\text{сш}) := \sqrt{0.5 \cdot 10^{0.1 \cdot \text{сш}}} \quad F_A(\text{сш}) := \text{pnorm}(x(\text{сш}), 0, 1) \quad \text{Рош}_A(\text{сш}) := 1 - F_A(\text{сш})$$

$$y(\text{сш}) := \sqrt{1 \cdot 10^{0.1 \cdot \text{сш}}} \quad F_{\text{Ч}}(\text{сш}) := \text{pnorm}(y(\text{сш}), 0, 1) \quad \text{Рош}_{\text{Ч}}(\text{сш}) := 1 - F_{\text{Ч}}(\text{сш})$$

$$z(\text{сш}) := \sqrt{2 \cdot 10^{0.1 \cdot \text{сш}}} \quad F_{\Phi}(\text{сш}) := \text{pnorm}(z(\text{сш}), 0, 1) \quad \text{Рош}_{\Phi}(\text{сш}) := 1 - F_{\Phi}(\text{сш})$$



На основании полученных результатов можно сделать следующие выводы:

Амплитудная телеграфия по помехоустойчивости существенно уступает двум другим методам манипуляции. Этот проигрыш выражается в том, что для получения одной и той же вероятности ошибки в случае АТ требуется иметь на входе блока обработки сигнала большее отношение сигнал-помеха

10. Заключение

В данной курсовой работе было произведено преобразование аналогового сигнала в цифровую форму и передача его посредством фазовой модуляции, был произведен расчет спектральных характеристик аналогового сигнала, практической ширины его спектра, его мощности, расчет интервала дискретизации и разрядности кода, расчет АКФ и энергетического спектра кодового сигнала, расчет спектральных характеристик модулированного сигнала и его мощности, а также расчет вероятности ошибки при его приеме.

11. Литература

Хазан В. Л.

Х 12 Компьютерный лабораторный практикум по курсу “Радиотехнические цепи и сигналы”: Учебное пособие. Омск: Изд-во ОмГТУ, 2001. 95 с

Каганов В.И. Радиотехнические цепи и сигналы (компьютеризированный курс)
ИД Форум, 2005 432стр.

Румянцев К.Е. Прием и обработка сигналов, изд.центр “Академия” 2004г., 528стр.

С.В. Кавчук Сборник примеров и задач по теории сигналов

Издательство Таганрогского государственного радиотехнического университета 97г.